Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2008

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

8.Blatt
Übung: 03.06.08
Abgabe: 10.06.08

Aufgabe 1: Wir betrachten im folgenden ein Black-Scholes-Modell mit zwei Aktien, in dem die Aktienkurse durch die geometrischen Brownschen Bewegungen

$$S_t^i = S_0^i \exp\big(\sigma_i B_t^i + (\alpha_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2)t\big), \qquad i \in 1, 2,$$

gegeben sind, wobei die Brownschen Bewegungen B^i konstante Korrelation $\rho \in (-1, 1)$ besitzen.

i) Man gebe ein äquivalentes Martingalmaß für dieses Modell an. Ist dieses eindeutig?

ii) Man berechne in diesem Modell einen arbitragefreien Preis eines "Produkt-Calls"

$$(S_T^1 S_T^2 - K)^+.$$

Aufgabe 2: *(Darstellung einer Barrier-Option durch Vanilla-Optionen)*
Wir betrachten im folgenden eine up-and-out Option

$$H = \varphi(S_T)\mathbb{1}_{\{\max\limits_{0\le u\le T} S_u \le B\}},$$

wobei φ eine messbare, nicht-negative Auszahlungsfunktion ist. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass sich der Preis dieser Option im Black-Scholes Modell durch die Preise von Europäischen Optionen mit Auszahlungsfunktion

$$\varphi^B(x) = \varphi(x)\mathbb{1}_{\{x<B\}}$$

darstellen läßt:

i) Man zeige, dass unter dem Martingalmaß P^* für $x < m$ und $\tilde{r} = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)/\sigma$

$$P^*[W_T^* + \tilde{r}T \in dx; \max_{0\le u\le T}(W_u^* + \tilde{r}u) < m] = P^*[W_T^* + \tilde{r}T \in dx] - e^{2\tilde{r}m} P^*[W_T^* + \tilde{r}T + 2m \in dx]$$

gilt.

ii) Man zeige, dass der Preis der Barrier-Option durch

$$\Pi[H] = \Pi\big(\varphi^B(S_T)\big) - \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\frac{2\tilde{r}}{\sigma}} \Pi\left(\varphi^B\left(B^2 \frac{S_T}{S_0}\right)\right)$$

gegeben ist.

Aufgabe 3: In einem zinsfreien, illiquiden Markt ($r = 0$) betrachten wir das Nutzenoptimierungsproblem für die exponetiellen Nutzenfunktion

$$u(x) = -e^{-\alpha x}, \qquad \alpha > 0,$$

und den Wertprozess

$$\begin{aligned} dV_t^x &= \theta_t(\sigma\, dW_t + \mu\, dt) - \frac{\beta}{2}\theta_t^2\, dt, \\ V_0^x &= x. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\beta > 0$ eine konstante, die die Illiquidität des Marktes beschreibt.

i) Man leite die Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung für die Wertfunktion

$$U(x, T) = \sup_{\theta \in \Theta} E[u(V_T^x)]$$

her, wobei Θ die Menge aller fast-sicher quadratintegrierbaren, vorhersehbaren Strategien ist.

ii) Man löse diese HJB-Gleichung zu einem geeigneten Randwert mit Hilfe des Separationsansatzes explizit.

iii) Man begründe, warum wir für $\beta > 0$ jede fast-sicher quadratintegrierbare, vorhersehbare Strategie zulassen können und bestimme die optimale Strategie θ^*.