Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2008

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

7.Blatt
Übung: 27.05.08
Abgabe: 03.06.08

Aufgabe 1: Sei $(\tilde{S}_t)$ der diskontierte Wertprozess einer Aktie, er sei stetig und genüge der NFLVR-Bedingung. Für $\tilde{H} \in L^\infty$ sind äquivalent:

(i) Es gilt $\tilde{H} = \tilde{V}_T$ für eine replizierende Strategie θ mit beschränktem Wertprozess $\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t \theta_s d\tilde{S}_s$.

(ii) Der Erwartungswert $E_{P^*}[\tilde{H}]$ unter einem äquivalenten Martingalmaß P^* hängt nicht von der Wahl des äquivalenten lokalen Martingalmaßes ab.

Aufgabe 2: Man benutze die Girsanov-Transformation, um die folgende Relation zwischen Call- und Put-Preisen in einem Black-Scholes-Modell mit Zinsrate $r = 0$ zu beweisen:

$$E_z^*\left[(S_T - K)^+\right] = zKE_{\frac{1}{z}}^*\left[\left(\frac{1}{K} - S_T\right)^+\right] = E_K^*\left[(z - S_T)^+\right],$$

wobei $E_z^*[f(S_T)]$ den Erwartungswert $E_{P^*}[f(S_T)]$ mit der Anfangsbedingung $S_0 = z$ für die geometrische Brownsche Bewegung unter dem äquivalen Martingalmaß P^* bezeichnet.

Aufgabe 3: Es sei $K > B > 0$, $z > B$ und $\tau_B := \inf\{t : S_t = B\}$. Man benutze die starke Markoveigenschaft und die Resultate über den Zusammenhang von Call- und Putpreisen von Aufgabe 2, um in folgenden Schritten den Preis eines *Down-and-in* Calls für Zinsrate $r = 0$ im Black-Scholes Modell zu berechnen.

(i) In einem ersten Schritt zeige man, dass

$$E_z^*\left[(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_{\tau_B}\right](\omega) = \frac{K}{B} E_B^*\left[\left(\frac{B^2}{K} - S_{T-\tau_B(\omega)}\right)^+\right]$$

P_z^0-fast sicher auf $\{\tau_B \leq T\}$ gilt.

(ii) Hieraus folgere man nun, dass der Preis des *Down-and-in* Calls gegeben ist durch

$$E_z^*\left[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{\tau_B \leq T\}}\right] = \frac{K}{B} E_z^*\left[\left(\frac{B^2}{K} - S_T\right)^+\right] = E_B^*\left[\left(S_T - \frac{zK}{B}\right)^+\right].$$

Aufgabe 4: Viele exotische Optionen hängen von Funktionalen des Pfades $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$, wie $\max_{0 \leq t \leq T} S_t$ oder $\int_0^T S_t\, dt$, ab. Im Folgenden sei S eine geometrische Brownsche Bewegung mit Volatilität σ und Drift μ.

i) Man gebe Itô-Formeln für glatte Funktionen der Prozesse (t, S_t, A_t) und (t, S_t, M_t) an, wobei

$$A_t := \int_0^t S_s\, ds \qquad \text{und} \qquad M_t := \max_{0 \leq s \leq t} S_s.$$

ii) Man gebe partielle Differentialgleichungen (gegebenenfalls mit Randbedingungen) an, die eine glatte Funktion $v : [0, \infty) \times (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$ erfüllen muss, damit $v(t, S_t, A_t)$ bzw. $v(t, S_t, M_t)$ Wertprozesse selbstfinanzierender Handelsstrategien sind.

Jede Aufgabe 6 Punkte