Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2008

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

5.Blatt
Übung: 13.05.08
Abgabe: 20.05.08

Aufgabe 1: Wir betrachten im Black-Scholes Setting den Fall einer kontinuierlichen Dividendenzahlung (was eine gute Approximation etwa für Fonds, die aus etlichen Aktien bestehen, ist). Die kontinuierliche Dividenenzahlung mit der Rate δ reduziert den Wert der Aktie um diesen Betrag, die Stochstische Differentialgleichung für den Preisprozess der Aktie lautet also

$$dS_t = \sigma S_t \, dW_t + (r - \delta) S_t \, dt.$$

Die Dividenen werden sofort auf unseren Cash Account transferiert. Man stelle für diese Modell die entsprechende Black-Scholes-Differentialgleichung auf und berechne den Preis einer Europäischen Call-Option.

Aufgabe 2: Wir betrachten im Black-Scholes-Model die Anlagestrategie des *Constant Proportional Portfolio Insurance (CPPI)*: Wir investieren einen konstanten Anteil unseres Vermögens in die Aktie (also $\theta_t = \beta V_t / S_t$, $\beta \in \mathbb{R}$).

a) Man stelle die stochastische Differentialgleichung für den Vermögensprozess V_t auf und löse sie explizit.

b) Man finde diejenige Investitionsstrategie, die das schnellste exponentielle Wachstum hat, man bestimme also β so, dass es den Erwartungswert von $\log V_t$ maximiert.

Aufgabe 3: Wir betrachten einen Finanzmarkt, der aus einem Cash Account und zwei riskanten Asssts S^1 und S^2 besteht, gegeben durch

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= r S_t^1 \, dt + \sigma^1 S_t^1 \, dW_t \qquad & S_0^1 &= s_0^1, \\ dS_t^2 &= r S_t^2 \, dt + \sigma^2 S_t^2 \, dB_t \qquad & S_0^2 &= s_0^2. \end{aligned}$$

Wir betrachten das erste Asset als numéraire, erhalten also unter diesem Numéraire für das zweite Asset $S_t^{2(N)} = \frac{S_t^2}{S_t^1}$.

a) Wie sieht das risikoneutrale Maß $\tilde{P}^{(N)}$ für $S_t^{2(N)}$ aus, wenn $B_t = W_t$?

b) Seien nun W und B zwei korrellierte Brownsche Bewegungen, also $B_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2} \hat{W}_t$, wobei $\hat{W}$ eine von W unabhängige Brownsche Bewegung ist und $\rho \in [-1, , 1]$. Wie sieht nun $\tilde{P}^{(N)}$ aus?

c) Man formuliere die Bedingung für eine selbstfinanzierende Strategie unter dem neuen Numéraire und zeige, dass die selbstfinanzierenden Strategien unter dem neuen Numéraire dieselben wie die unter dem alten sind.

Aufgabe 4:

a) Man schreibe in einer höheren Programmiersprache ein Programm, das zur Simulation von Pfaden einer geometrischen Brownschen Bewegung für $0 \leq t \leq 1$ genutzt werden kann. Dabei soll der Nutzer den Drift α, die Volatilität σ und den Anfangswert S_0 der geometrischen Brownschen Bewegung sowie die Anzahl der Stützstellen n und die Anzahl der zu simulierenden Pfade angeben können. Es soll zum Einen die explizite Formel

$$S_t = S_0 \exp\Big(\sigma W_t - \big(\frac{1}{2}\sigma^2 - \alpha\big)t\Big)$$

und zum Anderen sie entsprechende stochastische Differentialgleichung für die pfadweise Simulation genutzt werden.
Abzugeben sind der Programmcode und Plots von je 15 Pfaden für je beide Methoden mit $\alpha = 1,5$, $\sigma = 0,3$, $S_0 = 100$ und $n = 2^{10} + 1$.

b) Man benutze dieses Programm, um den Preis einer Europäischen at the Money-Call-Option (also Strike $K = 100$) zu berechnen, wobei der Aktienkurs durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit den obigen Parametern gegeben ist und der Cash Account mit $r = 1,05$ verzinzinst wird.