

## Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

4. Blatt

Übung: 06.05.08

Abgabe: 13.05.08

**Aufgabe 1:** Man beweise die Itô-Formel für die geometrische Brownsche Bewegung

$$S_t := S_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right):$$

Ist  $f(t, s) \in C^{1,2}$ , so gilt

$$\begin{aligned} df(t, S_t) &= f_s(t, S_t) dS_t + (L_0 f(t, S_t) + f_t(t, S_t)) dt \\ &= f_s(t, S_t) \sigma S_t dB_t + (L_\alpha f(t, S_t) + f_t(t, S_t)) dt, \end{aligned}$$

wobei für  $\alpha \in \mathbb{R}$  der Differentialoperator  $L_\alpha$  durch

$$L_\alpha f(t, s) := \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 f_{ss}(t, s) + \alpha s f_s(t, s).$$

gegeben ist.

**Aufgabe 2:** *Alternativer Beweis der Itô-Formel:*

- i) Mit Hilfe von Itôs Produktregel/partieller Integrationsformel zeige man, dass die ( $d$ -dimensionale) Itô-Formel

$$f(S_t) - f(S_0) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(S_s) dS_s + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} f(S_s) d\langle S^i, S^j \rangle_s$$

für Polynome  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  und stetige Semimartingale  $S$  gilt.

- ii) Durch geeignete Approximation durch Polynome übertrage man das Resultat auf beliebige Funktionen  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ .

**Aufgabe 3:** Es sei  $W$  eine  $d$ -dimensionale Brownsche Bewegung,  $d \geq 3$ ,  $x \neq 0$ . Es kann gezeigt werden, dass  $W_t \neq -x$  für alle  $t$   $P$ -f.s. und  $\lim_{t \rightarrow \infty} |W_t| = \infty$   $P$ -fast sicher (Transienz) gilt.

- i) Sei  $h(y) := |y|^{2-d}$ . Man zeige, dass  $h$  harmonisch in  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  ist, d.h. dass  $\Delta h = 0$  in  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ .  
 ii) Man folgere aus i), dass  $M_t := h(W_t + x)$  ein stetiges lokales Martingal ist.  
 iii) Man zeige nun, dass  $M_t$  beschränkt in  $L^p$ ,  $p \in [1, \frac{d}{d-2})$ , und somit die Familie  $(M_t)_{t \geq 0}$  gleichgradig integrierbar ist.  
 iv) Man folgere nun, dass für  $t \uparrow \infty$  aber  $E[M_t] \rightarrow 0$  gilt und somit  $M$  kein echtes Martingal sein kann.

**Aufgabe 4:** Sei  $\theta$  eine bzgl. des stetigen Martingals  $M$  integrierbare Strategie. Man zeige, dass es dann zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Strategie gibt, die bis zum Zeitpunkt  $T$  das Anlageportfolio fast sicher nur endlich oft umschichtet und deren Wertprozess maximal um  $\epsilon$  von dem von  $\theta$  induzierten abweicht.

Genauer zeige man, dass es ein  $\theta^\epsilon$  der Form

$$\theta^\epsilon = \sum_i \vartheta_i 1_{]T_{i-1}, T_i]}$$

gibt, so dass

- 1)  $0 = T_0 \leq T_1 \leq \dots$  eine wachsende Folge von Stoppzeiten mit  $P[T_n = T \text{ für hinreichend grosses } n] = 1$  ist und
- 2)  $\max_{t \in [0, T]} |\int_0^t \theta dM - \int_0^t \theta^\epsilon dM| \leq \epsilon$  fast sicher gilt.

*Zusatzfragen:* Gilt ein analoges Resultat auch für stetige Semimartingale? Was ist mit unstetigen (Semi-)Martingalen? *(bis zu 2 Zusatzpunkte)*

*Hinweis:* Man mache sich klar, dass die Aufgabe leicht zu lösen wäre, wenn man die Approximation in 2) nur mit Wahrscheinlichkeit  $\geq 1 - \epsilon$  fordern würde. Man betrachte dann  $\epsilon_n = \epsilon/2^n$  und konstruiere  $\theta^\epsilon$  induktiv, indem man eine einfache Strategie wählt, die Punkt 2) bei Maximalabweichung  $\epsilon_n$  mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \epsilon_n$  erfüllt, und indem man für die restliche Laufzeit der Strategie zu einer noch besseren einfachen Approximation wechselt, wenn besagte Abweichung doch zu gross wird. Ein Borel-Cantelli-Argument liefert dann, dass letzteres fast sicher nur endlich oft passieren wird.