

## Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

3. Blatt

Übung: 29.04.08  
 Abgabe: 06.05.08

**Aufgabe 1:** Es seien  $X$  und  $Y$  zwei stetige Semimartingale,  $X = M + A$ ,  $Y = N + B$ , wobei  $M$  und  $N$  stetige lokale Martingale und  $A, B$  rechtsstetige Prozesse von beschränkter Totalvariation sind. Weiterhin definieren wir für ein stetiges Semimartingal  $Z$  das *stochastische Exponential*  $\mathcal{E}(\cdot)$  als Lösung der stochastischen Differentialgleichung (SDE)

$$d\mathcal{E}(Z)_t := \mathcal{E}(Z)_t dZ_t; \quad \mathcal{E}(Z)_0 = 1.$$

Man zeige:

- (i) Die Lösung der stochastischen Differentiengleichung ist eindeutig, indem man die Itô-Formel auf den Quotienten zweier Lösungen anwendet.
- (ii) Für jedes  $t \in [0, \infty[$  gilt  $P$ -fast sicher

$$\mathcal{E}(X + Y)_t = \mathcal{E}(X)_t \mathcal{E}(Y)_t \exp(-\langle M, N \rangle_t),$$

wiederum via Itô-Formel.

**Aufgabe 2:** Es sei  $X$  ein stetiges Semimartingal, und  $(\theta^n)$  eine Folge von vorhersehbaren Prozessen, die punktweise gegen Null konvergiert. Man beweise die folgende *stochastische Form des Satzes von Lebesgue* über dominierte Konvergenz:

- (i) Gibt es zu  $X = M + A$ ,  $M$  ein lokales Martingal und  $A$  ein Prozess von beschränkter Totalvariation, einen vorhersehbaren stochastischen Prozess  $\theta \in L^2(\Omega \times [0, T], P \otimes d\langle M \rangle_t) \cap L^1(\Omega \times [0, T], P \otimes |d\langle A \rangle_t|)$  mit  $|\theta^n| < \theta$  fast sicher, dann konvergiert

$$\int \theta_s^n dX_s$$

in  $L^2$  gleichmäßig gegen 0 auf jedem Kompaktum. Insbesondere gilt für  $T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \theta_s^n dX_s \right| = 0$$

in  $L^2$  (Hinweis: Die Doob-Ungleichung in stetiger Zeit lautet: Ist  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  ein rechtsstetiges Martingal oder ein positives Submartingal, so gilt für  $X^* := \sup_{t \in [0, T]} |X_t|$ ,  $p \geq 1$  und  $\lambda \geq 0$

$$\lambda^p P[X^* \geq \lambda] \leq \sup_{t \in [0, T]} E[|X_t|^p]$$

und für  $p > 1$

$$\|X^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t \in [0, T]} \|X_t\|_p.$$

- (ii) Man formuliere und beweise die analoge Aussage für  $\theta \in L^2(X)$  und stochastische Konvergenz.

**Aufgabe 3:**

- (i) Man berechne mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten die Lösung der linearen (deterministischen) Differentialgleichung (ODE)

$$d\hat{V}_t = \alpha \hat{V}_t dt + \sigma dt.$$

- (ii) Man Versuche diese Methode auf die lineare *stochastische Differentialgleichung (SDE)*

$$dV_t = \alpha V_t dt + \sigma dW_t,$$

$(W_t)$  eine Brownsche Bewegung, zu übertragen und beweise mit Hilfe der Itô's Produktregel, dass es sich tatsächlich um eine Lösung der SDE handelt.

**Aufgabe 4:** Sei  $X_t$  die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = X_t dW_t,$$

wobei  $(W_t)$  eine Brownsche Bewegung bezeichnet und weiterhin

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t \geq 2 \vee X_t \leq \frac{1}{2}\}$$

eine Stoppzeit ist. Man berechne  $E[e^{-\tau}]$ , indem man eine Funktion  $u$  findet, so dass

$$\begin{cases} V_t := u(X_t)e^{-t} \text{ ist ein lokales Martingal} \\ u(2) = u(\frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$$

gilt.