Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2008

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

2.Blatt
Übung: 22.04.08
Abgabe: 29.04.08

Aufgabe 1:

a) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und τ eine Stoppzeit. Man zeige, dass $\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \,:\, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$ eine σ-Algebra ist.

b) Man finde unabhängige stetige Martingale M, N und eine Stoppzeit τ, so dass M^τ und N^τ nicht unabhängig sind.

c) Sei $(W_t)_{t\in[0,T]}$ eine Brownsche Bewegung. Man berechne mit Hilfe der Itô-Formel $E[W_t^n]$ rekursiv für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2: Man zeige:

a) Der Pfad einer Brownschen Bewegung $(W_t)_{t\in[0,T]}$ ist P-fast sicher von lokal unendlicher Totalvariation.

b) Die quadratische Variation $\langle M\rangle$ eines stetigen Martingals $(M_t)_{t\in[0,T]}$ ist genau dann fast sicher 0, wenn $M_t = M_0$ für alle $t \in [0,T]$ P-fast sicher.

c) Für jedes stetige Martingal $(M_t)_{t\in[0,T]}$ gilt, dass M und $\langle M\rangle$ dieselben Konstantheitsintervalle haben.

d) Sei $(S_t)_{t\in[0,T]}$ ein Semimartingal mit $S_t = M_t + A_t$, wobei $(M_t)_{t\in[0,T]}$ ein stetiges Martingal und $(A_t)_{t\in[0,T]}$ ein rechtsstetiger Prozess von endlicher Totalvariation ist. Man zeige, dass $\langle S\rangle_t = \langle M\rangle_t$ für alle $t \in [0,T]$ P-fast sicher gilt.

Aufgabe 3: Es sei $(W_t)_{t\in[0,T]}$ eine Brownsche Bewegung. Für $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in [0,1]$ und (ζ_n) eine feste Folge von aufsteigenden Zerlegungen definieren wir das allgemeine *(Fisk-)Stratonovitch-Integral*

$$\int_0^t f(W_s)\, d_\alpha W_s := \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in \zeta_n \\ t_{i+1} \leq t}} f\left((W_{t_i}) + \alpha(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Man definiere den Limes in geeigneter Weise und zeige, dass er existiert und das Integral somit wohldefiniert ist. Weiters zeige man, dass

$$\int_0^t f(W_s)\, d_\alpha W_s = \int_0^t f(W_s)\, dW_s + \alpha \int_0^t f'(W_s)\, ds$$

gilt.

Jede Aufgabe 8 Punkte