Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2008

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

12. und letztes Blatt
Übung: 01.07.08
Abgabe: 08.07.08

Aufgabe 1: Im Heston-Modell erfüllt die Varianz $v_t = \sigma_t^2$ die SDE

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)\,dt + \xi\sqrt{v_t}\,dW_t.$$

Man zeige, dass die Volatilität σ_t eine SDE der Form

$$d\sigma_t = \left(\frac{\alpha}{\sigma_t} - \beta\sigma_t\right)dt + \gamma\,dW_t$$

erfüllt und berechne die Parameter α, β und γ.

Aufgabe 2: Wir betrachten im Folgenden die Varianz

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)\,dt + \xi\sqrt{v_t}\,dW_t$$

im Heston-Modell mit κ, θ, $\xi \geq 0$. Mit $P_t(v|v_i)$ bezeichnen wir die bedingte Dichte, definiert durch $P_t(v|v_i)\,da := P(v_t \in da|v_i = v_0)$.

i) Unter der Bedingung, dass die "Dimension" $d = \frac{4\kappa\theta}{\xi^2}$ größer als 2 ist, leite man die Fokker-Planck-Gleichung für $P_t(v|v_i)$ her.
ii) Man berechne die invarainte Verteilung von v explizit, indem man zeigt, dass die entsprechende Gleichung für stationäre Dichten (also $\frac{\partial}{\partial t}P_t(v|v_i) = 0$) der Dichte einer (geeignet parametrisierten) Gamma-Verteilung entspricht.

Aufgabe 3: Ein lokales Martingal, das kein gleichgradig integrierbares echtes Martingal ist, heißt *striktes lokales Martingal*. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass es zwei stetige stochastische Prozesse X, Y gibt, so dass

i) der Prozess X ein striktes lokales Martingal mit $X_\infty > 0$ fast sicher ist
ii) der Prozess Y ein gleichgradig integrierbares (echtes) Martingal ist und auch
iii) der Prozess XY ein gleichgradig integrierbares (echtes) Martingal ist.

Hierzu gehen wir wie folgt vor: Seien W^1 und W^2 zwei unabhängige Brownsche Bewegungen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ erzegut durch (W^1, W^2). Wir definieren zwei Prozesse

$$L_t := e^{W_t^1 - \frac{1}{2}t} \qquad M_t := e^{W_t^2 - \frac{1}{2}t}$$

und zwei Stoppzeiten

$$\tau := \inf\{t\,:\,L_t = 1/2\} \qquad \sigma := \inf\{t\,:\,M_t = 2\}.$$

Nun sei

$$X := L^{\tau\wedge\sigma} \qquad Y := M^{\tau\wedge\sigma},$$

man zeige dass X und Y die Bedingungen i)-iii) erfüllen.
Anmerkung: Die gleichgradige Integrierbarkeit von XY kann mit Hilfe von

$$E[L_{\tau\wedge\sigma}] = \frac{1}{2}P[\sigma = \infty] + P[\sigma < \infty] = \frac{3}{4} < 1$$

gezeigt werden.

Bitte wenden

Zusatzaufgabe (bis zu 8 Zusatzpunkte):
Es seien

$$h_0(x) := 1, \qquad h_n(x) := \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad n \geq 1$$

die *Hermite-Polynome*.

i) Man beweise die Entwicklung

$$\exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n h_n(x)$$

und folgere

$$h_n'(x) = h_{n-1}(x) \qquad \text{und} \qquad (n+1)h_{n+1} = xh_n(x) - h_{n-1}(x).$$

ii) Weiterhin folgere man, dass die Funktionen

$$H_n(x,t) := n! t^{\frac{n}{2}} h_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

die Relation

$$\frac{\partial}{\partial x} H_n(x,t) = n H_{n-1}(x,t)$$

efrüllen und somit die duale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} H_n(x,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n(x,t) = 0.$$

lösen.

iii) Sei nun $(W_t)_{t\in[0,T]}$ eine Brownsche Bewegung; man zeige, dass $H_n(W_t, t)$ ein stetiges Martingal ist und

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} dW_{t_n} \cdots dW_{t_2} dW_{t_1} = \frac{1}{n!} H_n(W_t, t)$$

gilt. Das heißt, die Hermite-Polynome spielen im Itô-Kalkül dieselbe Rolle wie die Monome x^n im Leibnizschen Differentialkalkül.