

## Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

11. Blatt

Übung: 24.06.08

Abgabe: 01.07.08

**Aufgabe 1:** Im Black-Scholes Modell wollen wir eine Europäische Call-Option  $H$  mit Strike  $K$  und Ausübungszeitpunkt  $T$  so hedgen, dass der erwartete Verlust unter der Verlustfunktion  $l(x) = (x^+)^p$ ,  $p \in ]1, \infty[$  minimal wird.

- i) Man bestimme für  $p \downarrow 1$  und  $p \uparrow \infty$  das Auszahlungsprofil einer Europäischen Option, deren optimale Hedgingstrategie genau der minimierenden Strategie entspricht.
- ii) Ist dies für den Fall  $p \uparrow \infty$  äquivalent dazu, gleich unter der Supremumsnorm zu minimieren?

**Aufgabe 2:** Es seien  $B^1, \dots, B^d$  unabhängige Brownsche Bewegungen auf  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ . Für Konstanten  $\kappa, \sigma > 0$  definieren wir die *Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse*  $V^i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , als Lösungen der stochastischen Differentialgleichungen

$$dV_t^i = -\frac{\kappa}{2} V_t^i dt + \frac{\sigma}{2} dB_t^i$$

mit  $V_0^i \neq 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, d\}$  (die Lösung dieser SDE haben wir schon in Blatt Blatt 3, Aufgabe 3 besprochen).

Nun setzen wir

$$r_t := \sum_{i=1}^d (V_t^i)^2.$$

Man zeige, dass es eine Brownsche Bewegung  $W$  und eine Konstante  $\theta$  gibt, so dass  $r$  Lösung der SDE

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$$

ist und berechne  $\theta$ .

*Anmerkung:* Dieser Prozess ist sehr populär bei der Modellierung von Aktienkursen mit stochastischer Volatilität, so wird etwa die Volatilität des Aktienkurses im *Heston-Modell* durch einen solchen Prozess modelliert. Auch in der Theorie der Zinsstrukturmodelle (die in den folgenden Vorlesungen behandelt werden wird) wird er oft zum Modellieren verwendet, hier heißt  $r$  *Cox-Ingersoll-Ross-Prozess* (oder kurz *CIR-Prozess*).

**Aufgabe 3:** Im Folgenden betrachten wir das Heston-Modell

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1, \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t^2, \end{aligned}$$

wobei  $W_t^1$  und  $W_t^2$  zwei Brownsche Bewegungen mit konstanter Korrelation  $\rho \in ]-1, 1[$  sind. Weiterhin sei der Zinssatz  $r$  konstant und  $\kappa, \theta$  und  $\xi$  positive konstanten und die Filtration wie üblich  $(\mathcal{F}_t^{W^1, W^2})$ ,  $t \geq 0$ . Man gebe eine hinreichende Bedingung für ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  an, so dass  $Q$  ein äquivalentes lokales Martingalmaß ist.

**Aufgabe 4:** Will man einen CIR-Prozess

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \xi\sqrt{v_t} dW_t$$

mit  $\kappa, \theta, \xi > 0$  numerisch modellieren, so ist das stochastische Eulerverfahren nicht gut geeignet, da die Gaußschen Inkremente nicht nach unten beschränkt sind und so der Prozess negativ werden kann, was der analytischen Lösung widerspricht. Um dieses Problem zu umgehen, kann man wie folgt vorgehen:

- i) Man leite aus der SDE für  $v$  und für die Zerlegung  $t_i = iT/n$  von  $[0, T]$  das implizite Rekursionsschema

$$v_{t_{i+1}} = v_{t_i} + (\kappa\theta - \xi^2/2 - \kappa v_{t_{i+1}})T/n + \xi\sqrt{v_{t_{i+1}}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

her, indem man die SDE mit Hilfe von Stratonovich-Integralen umschreibt und diese dann approximiert.

- ii) Man zeige, dass sich für  $\xi^2 < 2\kappa\theta$  und  $\kappa \leq n/T$  hieraus die explizite Darstellung

$$v_{t_{i+1}} = \left( \frac{\xi(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sqrt{\xi^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + 4(v_{t_i} + (\kappa\theta - \xi^2/2)t/n)(1 + \kappa T/n)}}{2 + 2\kappa T/n} \right)^2$$

gewinnen lässt.

- iii) Man schreibe nun ein geeignetes Programm zur Modellierung des CIR-Prozesses und plote 100 Pfade von  $v_t$  bei  $T = 1$  und  $n = 100$ .