Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Peter Bank
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Jean Downes, MA 7-2

Sommersemester 2008

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

10.Blatt
Übung: 17.06.08
Abgabe: 24.06.08

Aufgabe 1:

i) Beim Quantil-Hedging haben wir uns auf zulässige Strategien θ beschränkt, für die der Wertprozess nichtnegativ ist ($V_t \geq 0$ für alle $t \in [0, T]$). Um diese Beschränkung zu verstehen, zeige man, dass das Problem schlecht gestellt ist, wenn man versucht über alle zulässigen Strageien θ (also solche, deren Wertprozess nach unten beschränkt ist), zu maximieren.

ii) Nun nehmen wir an, dass bei einem fixen Zinssatz $r = 0$ ein fixer Kreditrahmen $c > 0$ gegeben ist, wir uns also auf zulässige Strategien θ beschränken, für die $V_t > -c$ für alle $t \in [0, T]$ gilt. Man maximiere $P[V_T \geq H]$ für über diese Strategien.

Aufgabe 2: Wir betrachten im folgenden ein Optimierungsproblem für den Temporalnutzen in einem vollständigen Markt mit Zinssatz $r = 0$, wollen also

$$E\left[\int_0^T e^{-\delta t} u(c_t)\, dt\right]$$

für eine wachsende, konkave und zweimal differenzierbare Nutzenfunktion u, die die Inada-Bedingungen erfüllt, maximieren wobei der Wertprozess V durch

$$dV_t = \theta\, dS_t - c_t\, dt, \qquad V_0 = x > 0,$$

gegeben ist. Man leite eine Bedingung 1. Ordnung für den optimalen Konsumplan her, indem man den erwarteten Nutzen mit Hilfe der Superherdging-Bedingung $E^*[\int_0^T c_t\, dt] \leq x$ nach oben abschätzt, zur konvex Konjugierten übergeht, die Preisdichte durch $u'(c_t^*)$ darstellt und den optimalen Konsumplan c_t^* bestimmt.

Aufgabe 3: Im Folgenden betrachten wir ein Konsumproblem, bei dem es keine riskantes Anlage gibt, aber der Preis p unseres zu konsumierenden Gutes stochastischen Veränderungen unterworfen ist: Die Dynamik des Preisprozesses ist gegeben durch die stochastische Differentialgleichung

$$dp_t = \mu(p_t)\,dt + \sqrt{2}\sigma(p_t)\,dW_t, \qquad p_0 = p$$

(mit hinreichender Regularität von μ und σ, so dass eine eindeutige Lösung existiert) die Dynamik des Wertprozesses ist somit gegeben durch

$$dX_t = rX_t\,dt - c_t p_t\,dt, \qquad X_0 = x$$

wobei c_t die Konsumrate bezeichnen. Unser Ziel ist es, den erwarteten diskontierten Nutzen, gegeben durch

$$E[\int_0^\tau F(t, c_t)\,dt],$$

für endlichen Zeithorizont T zu maximieren, wobei τ die Ruinzeit, also die Stoppzeit $\tau := \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t = 0\} \wedge T$, bezeichnet.

i) Man stelle die optimale Wertfunktion $v(t, x, p)$ des Optimierungsproblems auf leite die HJB-Gleichung her (inklusive den Randbedingungen für $t = T$ und $x = 0$).

ii) Man nehme an, dass F von der Form $F(t, c) = e^{-\delta t} c^\alpha$ ist, für $\delta > 0$, $0 < \alpha < 1$. Man zeige, dass die optimale Wertfunktion v von der Form

$$v(t, x, p) = e^{-\delta t} x^\alpha \alpha^{-\alpha} G(t, p)$$

und die optimale Konsumstrategie durch eine der Form

$$c(t, x, p) = \frac{x}{p_t} \left(\frac{\alpha}{p_t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} G(t, p)^{\frac{1}{\alpha - 1}},$$

gegeben sind, wobei G die nichtlineare PDE

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} + (\alpha r - \delta)G + (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} G^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \mu \frac{\partial G}{\partial p} + \sigma^2 \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} = 0 \\ G(T, p) = 0, p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

löst.