

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

1. Blatt

Übung: 15.04.08

Abgabe: 22.04.08

Aufgabe 1: Es sei (B_t) eine (Standard-)Brownsche Bewegung, man zeige

a) dass die Zufallsvariable

$$Z(\omega) := \int_0^1 B_s(\omega) ds$$

normalverteilt ist und bestimme Erwartungswert und Varianz.

b) mit Hilfe des Satzes von Fubini, dass die Nullstellenmenge von (B_t) im Intervall $[0, 1]$,

$$N(\omega) := \{t \in [0, 1] : B_t(\omega) = 0\} \in \mathcal{B}([0, 1]),$$

eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Aufgabe 2: Es seien A_t und B_t , $t \geq 0$, zwei rechtsstetige Funktionen von lokal endlicher Variation. Man zeige:

i) Für die Stieltjes-Integrale bezüglich A und B gilt die folgende partielle Integrationsformel:

$$A_t B_t = A_0 B_0 + \int_{(0,t]} A_{s-} dB_s + \int_{(0,t]} B_s dA_s.$$

ii) Ist A stetig und $f \in C^1(\mathbb{R})$, so gilt

$$f(A_t) = f(A_0) + \int_0^t f'(A_s) dA_s.$$

iii) Ist A stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_0^t B_s dA_s = \int_0^t B_s A'_s ds.$$

Aufgabe 3: Sei A_t , $t \in [0, 1]$ eine reellwertige, rechtsstetige Funktion und ζ_n eine monotone Folge von Partitionen von $[0, 1]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |\zeta_n| = 0$. Für eine stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Summen

$$S_n^f := \sum_{t_i, t_{i+1} \in \zeta_n} f(t_i)(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}).$$

Man zeige: Konvergiert für $n \rightarrow \infty$ die Folge S_n^f für jede stetige, reellwertige Funktion f auf $[0, 1]$ gegen eine reelle Zahl S^f , dann muss A von endlicher Variation sein.

Hinweis: Für den Beweis wende man den Satz von Banach-Steinhaus über die gleichmäßige Beschränktheit auf die Operatorfamilie (T_n) , $T_n : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$T_n f := \sum_{t_i, t_{i+1} \in \zeta_n} f(t_i)(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}),$$

an. Als Urbild-Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ dient hier $C([0, 1]; \mathbb{R})$, der Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0, 1]$, ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.