Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Sommersemester 2007

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

9.Blatt
Übung: 19.06.07
Abgabe: 26.06.07

Aufgabe 1: Wir betrachten das Black-Scholes Modell. Angenommen wir investieren einen konstanten Anteil β unseres Vermögens in die Aktie (d.h. $\xi_t = \beta V_t / S_t$), was ist dann die beste Investitionsstrategie $\varphi = (\xi, \eta)$, so dass der Vermögensprozess das schnellste exponentielle Wachstum hat?
Hinweis: Hierfür berechne man zunächst dV_t und dann $d \log V_t$.

Aufgabe 2: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und B eine P-Brownsche Bewegung auf dem Intervall $[0, T]$, die in 1 startet. Weiterhin definieren wir das Maß $\tilde{P}$ durch

$$\tilde{P}[A] = P\,[\,A \,|\, B_t > 0 \text{ für alle } t \in [0, T]\,]\,, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Man bestimme alle zu $\tilde{P}$ äquivalenten Martingalmaße für B.

Aufgabe 3: Man zeige: ein "lokales lokales Martingal" ist ein lokales Martingal.

Aufgabe 4: Aus Itôs Darstellungssatz für Wienerfunktionale folgere man die Martingaldarstellungseigenschaft der Brownschen Bewegung: Sei M ein lokales Martingal auf dem Wienerraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Koordinatenprozess X. Dann gibt es ein progressiv messbares ξ mit $\int_0^t \xi_s^2 \, ds < \infty$ P-fast sicher, so dass

$$M_t = M_0 + \int_0^t \xi_s \, dX_s \quad P\text{-fast sicher für alle } t.$$

Insbesondere folgt daraus, dass M eine stetige Modifikation besitzt und ξ $dt \otimes dP$-fast überall eindeutig festgelegt ist.

Jede Aufgabe 6 Punkte