Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Sommersemester 2007

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

8.Blatt
Übung: 12.06.07
Abgabe: 19.06.07

Aufgabe 1: Bislang haben wir im Black-Scholes-Modell keine Dividendenzahlungen berücksichtigt. Die meisten Aktien zahlen allerdings zu bestimmten Zeitpunkten (etwa einmal im Jahr) eine Dividendenzahlung an ihre Besitzer aus. Wir wollen nun auch Dividendenzahlungen im Black-Scholes-Modell berücksichtigen, gehen allerdings der Einfachheit halber davon aus, dass die Dividenden δ stetig gezahlt werden und das ausgeschüttete Geld sofort wieder in die Aktie investiert wird.
Die Fragestellung lautet also: Man berechne den Black-Scholes Preis einer Europäischen Call-Option, wobei der Bond durch $B_t = e^{rt}$ und der Aktienkurs durch

$$S_t = S_0 e^{\sigma X_t - (r+\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

gegeben ist.

Aufgabe 2: Zwei Martingale M, $N \in \mathcal{H}_0^2$ heißen schwach orthogonal, falls $E[M_s N_t] = 0$ für alle s, $t \geq 0$. Man zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

i) M und N sind schwach orthogonal;
ii) $E[M_s N_s] = 0$ für alle $s \geq 0$;
iii) $E[\langle M, N\rangle_s] = 0$ für alle $s \geq 0$;
iv) $E[M_\tau N_s] = 0$ für alle $s \geq 0$ und alle Stoppzeiten $\tau \geq s$.

Aufgabe 3: Zwei Martingale M, $N \in \mathcal{H}_0^2$ heißen (stark) orthogonal, falls MN ebenfalls ein Martingal ist.

a) Man zeige, dass M und N genau dann orthogonal sind, wenn $E[M_\tau N_s] = 0$ für alle $s \geq 0$ und alle Stoppzeiten $\tau \leq s$.
b) Man gebe ein Beispiel von Martingalen M und N an, die schwach orthogonal, nicht aber orthogonal sind.

Aufgabe 4: Sei X eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $f_1, \dots, f_n$ stetige und beschränkte Funktionen auf $\mathbb{R}$, $0 = t_0 \leq t_1 < \cdots t_n = T$ und

$$H := \prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i}).$$

Man konstruiere einen progressiv messbaren Prozess ξ mit

$$H = E[H] + \int_0^T \xi_s \, dX_s,$$

indem man sukzessive auf den Intervallen $[t_{n-1}, t_n], \dots, [t_0, t_1]$ die (duale) Wärmeleitungsgleichung mit geeigneten Randbedingungen löst. Man zeige weiterhin, dass $\int \xi \, dX$ ein quadratintegrierbares Martingal ist.
Bemerkung: Im Kontext eines Finanzmarktmodells lässt sich H als Auszahlungsfunktion einer sogenannten *Fade*-Option oder einer Asiatischen Option mit geometrischer Mittelung interpretieren.

Jede Aufgabe 6 Punkte