Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Sommersemester 2007

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

7.Blatt
Übung: 05.06.07
Abgabe: 12.06.07

Aufgabe 1: Sei X eine $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und τ eine fast sicher endliche Stoppzeit. Man zeige, dass dann

$$\tilde{X}_t := X_{t+\tau} - X_\tau, \qquad t \geq 0$$

eine $(\mathcal{F}_{t+\tau})_{t\geq 0}$-Brownsche Bewegung ist, die unabhängig von $(\mathcal{F}_\tau)$ ist.

Aufgabe 2: Es sei $K > B > 0$, $z > B$ und $\tau_B := \inf\{t : S_t = B\}$. Man benutze die starke Markoveigenschaft und die Resultate über den Zusammenhang von Call- und Putpreisen vom letzten Übungsblatt, um in folgenden Schritten den Preis eines *Down-and-in* Calls für Zinsrate $r = 0$ zu berechnen.

(i) In einem ersten Schritt zeige man, dass

$$E_z^0\left[(S_T - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_{\tau_B}\right](\omega) = \frac{K}{B} E_B^0\left[\left(\frac{B^2}{K} - S_{T-\tau_B(\omega)}\right)^+\right]$$

P_z^0-fast sicher auf $\{\tau_B \leq T\}$ gilt.

(ii) Hieraus folgere man nun, dass der Preis des *Down-and-in* Calls gegeben ist durch

$$E_z^0\left[(S_T - K)^+ 1_{\{\tau_B \leq T\}}\right] = \frac{K}{B} E_z^0\left[\left(\frac{B^2}{K} - S_T\right)^+\right] = E_B^0\left[\left(S_T - \frac{zK}{B}\right)^+\right].$$

Aufgabe 3: Man zeige, dass der Black-Scholes-Preis eines *Up-and-out* Calls

$$C = (S_T - K)^+ 1_{\{\bar{S}_T < B\}}$$

für $0 < K < B$ gegeben ist durch

$$e^{-rT} E_z^r[C] = e^{-rT} E_z^r\left[(S_T - k)^+; S_T < B\right] - e^{-rT}\left(\frac{z}{B}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} E_z^r\left[\left(\left(\frac{B}{z}\right)^2 S_T - K\right)^+; S_T < \frac{z^2}{B}\right].$$

Aufgabe 4: Man berechne im Setting von Aufgabe 2 den Black-Scholes Preis eines *forward starting Down-and-in* Calls

$$C = (S_T - S_t)^+ 1_{\{\tau_B \leq T\}}.$$

Jede Aufgabe 6 Punkte