Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Sommersemester 2007

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

5.Blatt
Übung: 22.05.07
Abgabe: 29.05.07

Aufgabe 1: Im Black-Scholes Modell definieren wir als weitere Greeks *Volga* und *Vanna*, wobei das Volga der zweiten Ableitung des Wertprozesses nach der Volatilität und Vanna der Ableitung des Delta nach der Volatilität entspricht. Man berechne Volga und Vanna und erstelle je einen Plot zu ihrem typischen Verhalten.

Aufgabe 2: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Man finde Gegenbeispiele zu den folgenden Aussagen:

a) Für unabhängige Zufallsvariable X, Y und eine σ-Algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ gilt $E[XY \mid \mathcal{G}] = E[X \mid \mathcal{G}]E[Y \mid \mathcal{G}]$.
b) Für unabhängige stetige Martingale M, N und jede Stoppzeit τ folgt, dass auch M^τ und N^τ unabhängig sind.
c) Für zwei stochastische Prozesse X, Y mit $\langle X, Y \rangle \equiv 0$ gilt, dass X und Y unabhängig sind.

Aufgabe 3: Wir brtrachten das Black-Scholes-Modell mit Zinsrate $r = 0$, Volatilität $\sigma = 1$ und Trend $\alpha = 0$, d.h. wir haben ein Marktmodell mit Bond $B_t \equiv 1$ und riskanter Anlage $S_t = \exp(X_t - t/2)$ für eine Brownsche Bewegung X. Man konstruiere eine zahme selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi = (\xi, \eta)$ mit $V_0(\varphi) = 1$ und $V_1(\varphi) = 0$ P-f.s. (*"Suicide Strategy"*).
Hinweis: Eine Handelsstrategie heißt zahm, falls $V_t \geq 0$ P-f.s. Man definiere $M_t := \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}}\, dX_s$ und zeige, dass dies eine zeittransformierte Brownsche Bewegung ist. Diese benutze man nun um die Handelsstrategie zu konstruieren.

Aufgabe 4: Man zeige, dass die im Black-Scholes-Modell durch die geometrische Brownsche Bewegung generierten Maße auf $C[0,T]$ für verschiedene Volatilitäten singulär sind. Exakter: Für eine Brownsche Bewegung W und $|\sigma_1| \neq |\sigma_2|$ sind die durch

$$S_t^i = \exp\left(\sigma_i W_t - \frac{1}{2}\sigma_i^2 t\right), \qquad i \in \{1, 2\}$$

implizierten Maße $P_i = (S_i)_* P := P \circ (S^i)^{-1}$ auf $C[0,T]$ singulär: $P_1 \perp P_2$ (d.h. es gibt eine messbare Menge A mit $P_1[A] = 0$ und $P_2[A] = 1$).

Jede Aufgabe 6 Punkte