Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Sommersemester 2007

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

4.Blatt
Übung: 15.05.07
Abgabe: 22.05.07

Aufgabe 1: Sei B eine (Standard-)Brownsche Bewegung. Mit Hilfe der Itô-Formel und Induktion über k zeige man, dass für $k \in \mathbb{N}$

$$E[B_t^{2k}] = \prod_{i=1}^{k}(2i-1)t^k$$

gilt. Wie sieht dies für $E[B_t^{2k+1}]$ aus?

Aufgabe 2: Es sei M ein stetiges Martingal, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ eine Folge von Zeitpunkten und ξ ein adaptierter und beschränkter stochastischer Prozess. Man zeige, dass dann auch das 'Spielsystem'

$$S_t := \sum_{i=1}^{n} \xi_{t_{i-1}}(M_{t_i \wedge t} - M_{t_{i-1} \wedge t}), \quad t \geq 0,$$

ein stetiges Martingal ist.

Aufgabe 3: Es seien $X^1, \ldots, X^d$ unabhängige Brownsche Bewegungen auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Für Konstanten κ, $\sigma > 0$ definieren wir die Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse V^i, $i = 1, \ldots, d$, als Lösungen der stochastischen Differentialgleichungen

$$dV_t^i = -\frac{\kappa}{2} V_t^i \, dt + \frac{\sigma}{2} \, dX_t^i$$

mit $V_0^i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, d\}$ (vgl. Vorlesung für die Lösung dieser SDE).
Nun setzen wir

$$r_t := \sum_{i=1}^{d} (V_t^i)^2.$$

Man zeige, dass es eine Brownsche Bewegung W und eine Konstante θ gibt, so dass r Lösung der SDE

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) \, dt + \sigma\sqrt{r_t} \, dW_t$$

ist und berechne θ.
Anmerkung: In der Theorie der Zinsstrukturmodelle heißt r *Cox-Ingersoll-Ross*-Prozess (oder kurz *CIR*-Prozess). Dieser Prozess ist auch sehr populär bei der Modellierung von Aktienkursen mit stochastischer Volatilität, so wird etwa die Volatilität des Aktienkurses im *Heston*-Modell durch einen CIR-Prozess modelliert.

Aufgabe 4: Es sei X eine d-dimensionale Brownsche Bewegung, $d \geq 3$, $x \neq 0$. Es kann gezeigt werden, dass $X_t \neq -x$ für alle t P-f.s. gilt.

i) Sei $h(y) := |y|^{2-d}$. Man zeige, dass h harmonisch in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ist, d.h. dass $\triangle h = 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$;

ii) Man folgere aus i), dass $M_t := h(X_t + x)$ ein stetiges lokales Martingal ist;

iii) Man zeige nun, dass M_t beschränkt in L^p, $p \in [1, \frac{d}{d-2})$, und somit die Familie $(M_t)_{t \geq 0}$ gleichmäßig integrierbar ist;

iv) Man folgere nun, dass für $t \uparrow \infty$ aber $E[M_t] \to 0$ gilt und somit M kein echtes Martingal sein kann.