Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Sommersemester 2007

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

3.Blatt
Übung: 08.05.07
Abgabe: 15.05.07

Aufgabe 1: Eine häufige Annahme über den Verlauf von Zinskurven ist, dass sie sich entsprechend einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess verhalten (dies ist das sogenannte *Vasicek-Modell*):

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)\,dt + \sigma\,dB_t.$$

Es handelt sich hierbei um ein sogenanntes *mean reversion*-Modell, wobei θ *mean reversion level* (oder Gleichgewichtsniveau), κ *reversion speed* und σ Volatilität heißen. Man löse die stochastische Differentialgleichung und gebe somit r_t explizit an.

Aufgabe 2: Für Treppenfunktionen $g : [0,1) \to \mathbb{R}$ der Form

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{g}_i I_{[t_i,t_{i+1})}(t), \quad \tilde{g}_i \in \mathbb{R},$$

$0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n < 1$, und eine Brownsche Bewegung B definieren wir das (Itô)-Wiener-Integral durch

$$\int_0^t b(s)\,dB_s := \sum_{i=1}^{n} \tilde{g}_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Die Menge aller solcher Trepenfunktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{E}$.

i) Für $b \in \mathcal{E}$ bestimme man die Verteilung von $\int_0^1 b(s)\,dB_s$ und berechne insbesondere Erwartungswert und Varianz dieses Wiener-Integrals.

ii) Es kann gezeigt werden, dass $\mathcal{E}$ dicht in $L^2[0,1]$ liegt. Man folgere hieraus und aus a), dass durch $b \mapsto \int_0^1 b(s)\,dB_s$ somit eine Isometrie $L^2[0,1] \supset \mathcal{E} \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben ist. Durch geeignete Approximation beliebiger L^2-Funktionen setze man diese Isometrie zu einer auf ganz $L^2[0,1]$ definierten Abbildung fort.

iii) Sei nun $b \in L^2[0,1]$ beliebig. Was ist die Verteilung von $\int_0^1 b(s)\,dB_s$ in diesem allgemeinen Fall? Ist b von lokal endlicher Variation, so kann dieses Integral auch als Itô-Integral (via Itôs Produktregel) definiert werden. Man zeige, dass Itô- und Wiener-Integral in diesem Fall P-fast sicher übereinstimmen.

Aufgabe 3:

i) Sei (B_t) eine (Standard-)Brownsche Bewegung, man berechne die Verteilung von $\int_0^t B_s^2\,dB_s$.

ii) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und τ eine Stoppzeit. Man zeige, dass $\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t\}$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 4: Es sei v die Lösung der Black-Scholes-PDE

$$v_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) = 0,$$

im risikoneutralen Black-Scholes-Modell

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

Man zeige, dass $v(t, S_t)$ der Wertprozess einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie ist, also dass

$$v(t, S_t) = v(0, S_0) + \int_0^t \xi_s \, dS_s$$

gilt und gebe die selbstfinanzierende Handelsstrategie ξ explizit an.