Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Sommersemester 2007

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

2.Blatt
Übung: 24.04.07
Abgabe: 08.05.07

Aufgabe 1: Wir betrachten die folgende Verallgemeinerung eines Variance Swaps (vgl. Vorlesung):

$$H := \sum_{i=1}^{n} f(S_{t_i})(\log S_{t_{i+1}} - \log S_{t_i}),$$

wobei f eine stetige Funktion ist. Wählt man hier $f(x) = x$, so erhält man etwa den sogenannten *Entropy* oder *Gamma Swap*, für die (nicht stetige!) Funktion $f(x) = I_{[a,b]}(x)$ erhält man einen sogenannten *Corridor Variance Swap.* Mit Hilfe der Approximation

$$H \approx \int_0^T f(S_t)\, d\,\langle \log S \rangle_t$$

konstruiere man wie in der Vorlesung eine Absicherungsstrategie, bestehend aus einem dynamischen Anteil, Portfolios aus liquiden Put- und Call-Optionen, Forward-Kontrakten und einer Cash-Position. Man betrachte dies auch speziell für den Fall des Entropy Swaps.

Aufgabe 2:

a) Man finde die Analoga der Sinus- und Cosinusfunktionen im pfadweisen Itô-Kalkül, d.h. zu einem stetigen Pfad X mit stetiger quadratischer Variation gebe man stetige Pfade S und C an, so dass die Itô-Integrale $\int_0^t S_u\, dX_u$ und $\int_0^t C_u\, dX_u$ definiert sind und die stochastischen Differentialgleichungen

$$dS_t = C_t\, dX_t \qquad \text{und} \qquad dC_t = -S_t\, dX_t$$

erfüllt sind.

b) Nun gebe man auch die Analoga zu den Hyperbelfunktionen und der Exponentialfunktion im Itô-Kalkül an und begründe, warum dies dies die Analoga sind.

Aufgabe 3: Man beweise die Itô-Formel für die geometrische Brownsche Bewegung

$$S_t := S_0 \exp\left(\sigma B_t + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right):$$

Ist $f(t,z) \in C^{1,2}$, so gilt

$$\begin{aligned} df(t,S_t) &= f_z(t,s_t)\, dS_t + (L_o f(t,S_t) + f_t(t,S_t))\, dt \\ &= f_z(t,S_t)\sigma S_t\, dB_t + (L_\alpha f(t,S_t) + f_t(t,S_t)\, dt, \end{aligned}$$

wobei für $\alpha \in \mathbb{R}$ der Differentialoperator L_α durch

$$L_\alpha f(t,z) := \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 f_{zz}(t,z) + \alpha z f_z(t,z).$$

gegeben ist.

Aufgabe 4: Viele exotische Optionen hängen von Funktionalen des Pfades $(S_t)_{0 \le t \le T}$, wie $\max_{0 \le t \le T} S_t$ oder $\int_0^T S_t \, dt$, ab. Im Folgenden sei S eine geometrische Brownsche Bewegung mit Volatilität σ und Drift α. Man entwickle pfadweise Itô-Formeln für Funktionen der Prozesse (t, S_t, A_t) und (t, S_T, M_t), wobei

$$A_t := \int_0^t S_s \, ds \qquad \text{und} \qquad M_t := \max_{0 \le s \le t} S_s.$$

Jede Aufgabe 6 Punkte

Zusatzaufgabe In den Voraussetzungen für die Theoreme im Itô-Kalkül steht immer "Sei X ein stetiger Pfad mit stetiger quadratischer Variation". Dies legt nahe, dass es auch (sogar beschränkte) stetige Pfade gibt, deren (beschränkte) quadratische Variation nicht stetig ist. Man gebe ein Beispiel für einen solchen Pfad an.

5 Zusatzpunkte