Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Sommersemester 2007

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

11.und letztes Blatt
Übung: 03.07.07
Abgabe: 10.07.07

Aufgabe 1: Im Heston-Modell erfüllt die Varianz $v_t = \sigma_t^2$ die SDE

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)\,dt + \xi\sqrt{v_t}\,dW_t.$$

Man zeige, dass die Volatilität σ_t eine SDE der Form

$$d\sigma_t = \left(\frac{\alpha}{\sigma_t} - \beta\sigma_t\right)\,dt + \gamma\,dW_t$$

erfüllt und berechne die Parameter α, β und γ.

Aufgabe 2: Will man einen CIR-Prozess

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)\,dt + \xi\sqrt{v_t}\,dW_t$$

mit κ, θ, $\xi > 0$ numerisch modellieren, so ist das stochastische Eulerverfahren nicht gut geeignet, da die Gaußschen Inkremente nicht nach unten beschränkt sind und so der Prozess negativ werden kann, was der analytischen Lösung widerspricht. Um dieses Problem zu umgehen, kann man wie folgt vorgehen:

i) Man leite aus der SDE für r und für die Zerlegung $t_i = iT/n$ von $[0,T]$ das implizite Rekursionsschema

$$v_{t_{i+1}} = v_{t_i} + \big(\kappa\theta - \xi^2/2 - \kappa v_{t_{i+1}}\big)T/n + \xi\sqrt{v_{t_{i+1}}}\,(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

her.

ii) Man zeige, dass sich für $\xi^2 < 2\kappa\theta$ und $\kappa \leq n/T$ hieraus die explizite Darstellung

$$v_{t_{i+1}} = \left(\frac{\xi(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sqrt{\xi^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + 4(v_{t_i} + (\kappa\theta - \xi^2/2)t/n)(1 + kT/n)}}{2 + 2\kappa T/n}\right)^2$$

gewinnen lässt.

iii) Man schreibe nun ein geeignetes Programm zur Modellierung des CIR-Prozesses und plotte 100 Pfade von v_t bei $T = 1$ und $n = 100$.

Aufgabe 3 : Es seien B^1 und B^2 zwei Brownsche Bewegungen mit $\langle B^1, B^2 \rangle_t = \int_0^t \rho_s \, ds$ für einen progressiv messbaren Prozess ρ mit Werten in $[-1, 1]$. Man sagt, dass B^1 und B^2 zwei *korrelierte Brownsche Bewegungen* mit *Korrelationsprozess* ρ sind. Man zeige: Gilt

$$\int_0^t \frac{1}{1-\rho_s^2} \, ds < \infty \qquad P\text{-fast sicher für jedes } t,$$

dann sind durch

$$\begin{aligned} dW_t^1 &:= dB_t^1 && (1) \\ dW_t^2 &:= \sqrt{(1-\rho_t^2)^{-1}} (\, dB_t^2 - \rho_t \, dB_t^1) && (2) \end{aligned}$$

zwei unabhängige Brownsche Bewegungen W^1 und W^2 gegeben. Sind umgekehrt W^1, W^2 und ρ gegeben, dann definieren

$$\begin{aligned} dB_t^1 &:= dW_t^1 && (3) \\ dB_t^2 &:= \rho_t \, dW_t^1 + \sqrt{1-\rho_t^2} \, dW_t^2 && (4) \end{aligned}$$

zwei korrelierte Brownsche Bewegungen mit Korrelationsprozess ρ.

Aufgabe 4: Ein lokales Martingal, das kein gleichmäßig integrierbares echtes Martingal ist, heißt *striktes lokales Martingal*. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass es zwei stetige stochastische Prozesse X, Y gibt, so dass

i) der Prozess X ein striktes lokales Martingal mit $X_\infty > 0$ fast sicher ist

ii) der Prozess Y ein gleichmäßig integrierbares (echtes) Martingal ist und auch

iii) der Prozess XY ein gleichmäßig integrierbares (echtes) Martingal ist.

Hierzu gehen wir wie folgt vor: Seien W^1 und W^2 zwei unabhängige Brownsche Bewegungen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ erzeut durch (W^1, W^2). Wir definieren zwei Prozesse

$$L_t := e^{W_t^1 - \frac{1}{2}t} \qquad M_t := e^{W_t^2 - \frac{1}{2}t}$$

und zwei Stoppzeiten

$$\tau := \inf\{t \, : \, L_t = 1/2\} \qquad \sigma := \inf\{t \, : \, M_t = 2\}.$$

Nun sei

$$X := L^{\tau \wedge \sigma} \qquad Y := M^{\tau \wedge \sigma},$$

man zeige dass X und Y die Bedingungen i)-iii) erfüllen.

Anmerkung: Die gleichmäßige Integrierbarkeit von XY kann mit Hilfe von

$$E[L_{\tau \wedge \sigma}] = \frac{1}{2} P[\sigma = \infty] + P[\sigma < \infty] = \frac{3}{4} < 1$$

gezeigt werden.