Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Sommersemester 2007

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

10.Blatt
Übung: 26.06.07
Abgabe: 03.07.07

Aufgabe 1: Wir betrachten ein Marktmodell mit risikofreier Anlage $B_t = \exp\left(\int_0^t r_s\, ds\right)$, definiert durch einen beschränkten, progressiv messbaren shortrate-Prozess r, und mit einer riskanten Anlage $S = (S_t)_{0\leq t\leq T}$, die einer stochastischen Differentialgleichung der Form

$$dS_t = \sigma_t S_t\, dX_t + b_t S_t\, dt$$

genüge. Hierbei sei X eine Brownsche Bewegung, σ und b seien zwei progressiv messbare Prozesse mit $\sigma_t \geq \varepsilon > 0$ und $|b_t| \leq c < \infty$ P-f.s. für alle $t \in [0,T]$ und zwei Konstanten ε und c. Man gebe die Dichte eines äquivalenten lokalen Martingalmaßes an.

Aufgabe 2: (*Das Volatilitätssprungmodell)*: Wir betrachten das folgende Modell für einen Finanzmarkt mit stochastischer Volatilität: Die risikolose Zinsrate r sei 0, W eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und der Preisprozess S sei gegeben durch

$$S_t = \exp\left(\int_0^t \sigma_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2\, ds\right),$$

wobei σ_s für $s < T/2$ konstant $\sigma_0 > 0$ sei. In $T/2$ springt die Volatilität auf den zufälligen Wert $\sigma_{T/2}$ und bleibt dort, d.h. $\sigma_t = \sigma_{T/2}$ für $T/2 \leq t \leq T$. Wir nehmen an, dass $\sigma_{T/2}$ und W unabhängig seien und das $\sigma_{T/2}$ eine nichttriviale Verteilung besitzt. Man zeige, dass dieses Modell unvollständig ist, genauer: es gibt unendlich viele äquivalente Martingalmaße.

Aufgabe 3: Es sei P das Wienermaß auf $C([0,\infty))$ und X der Koordinatenprozess.

a) Sei nun $\tilde{P}$ die Verteilung von $Y_t = X_t + t$ $(t \geq 0)$ und τ eine Stoppzeit mit $P[\tau < \infty] = 1$. Man zeige, dass

$$E\big[\exp\big(X_\tau - \frac{1}{2}\tau\big)\big] = \tilde{P}[\tau < \infty].$$

b) Für

$$\tau_c := \inf\{t > 0\,:\, X_t - t = -c\}, \quad c > 0,$$

folgere man aus a) die Identität

$$E\big[e^{\frac{1}{2}\tau_c}\big] = e^c.$$

Aufgabe 4: Mit Hilfe von Augabe 3 und dem Satz von Dambis-Dubins-Schwarz konstruiere man einen alternativen Beweis des *Novikov-Kriteriums*: Man betrachte das stetige lokale Martingal Y als zeittransformierte Brownsche Bewegung $Y_t = B_{\langle Y \rangle_t}$ und zeige, dass für die wie in Aufgabe 3 definierte lokalisierende Folge von Stoppzeiten $\tau_c \uparrow \infty$, für $c \to \infty$, gilt, dass

$$E\left[\mathcal{E}(B)^{\tau_c}_{\langle Y \rangle_t}\right] = 1, \quad \forall t \in [0, \infty),$$

wobei $\mathcal{E}(\cdot)$ das Doléans-Dade-Exponential bezeichnet. Hieraus folgere man nun, dass $\mathcal{E}(Y)$ ein echtes Martingal ist, indem man zeigt, dass jedes nichtnegative lokale Martingal mit konstantem Erwartungswert ein echtes Martingal ist.