Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Sommersemester 2007

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

1.Blatt
Übung: 17.4.07
Abgabe: 24.04.07

Aufgabe 1: Es sei (B_t) eine (Standard-)Brownsche Bewegung, man zeige

a) dass die Zufallsvariable

$$Z(\omega) := \int_0^1 B_s(\omega)\, ds$$

$\mathcal{N}(0, 1/3)$-verteilt ist.

b) mit Hilfe des Satzes von Fubini, dass die Nullstellenmenge von (B_t) im Intervall $[0, 1]$,

$$N(\omega) := \{t \in [0, 1] \,:\, B_t(\omega) = 0\} \in \mathcal{B}([0, 1]),$$

eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Aufgabe 2: Es seien A_t und B_t, $t \geq 0$, zwei rechtsstetige Funktionen von lokal endlicher Variation. Man zeige:

i) Für die Stieltjes-Integrale bezüglich A und B gilt die folgende partielle Integrationsformel:

$$A_t B_t = A_0 B_0 + \int_{(0,t]} A_{s-}\, dB_s + \int_{(0,t]} B_s\, dA_s.$$

ii) Ist A stetig und $f \in C^1(\mathbb{R})$, so gilt

$$f(A_t) = f(A_0) + \int_0^t f'(A_s)\, dA_s.$$

iii) Ist A stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_0^t B_s\, dA_s = \int_0^t B_s A'_s\, ds.$$

Aufgabe 3: Es sei X ein stetiger reellwertiger Pfad mit stetiger quadratischer Variation $\langle X \rangle$ entlang einer festen, aufsteigenden Folge (ζ_n) von Zerlegungen. Man zeige, dass für $g \in C^1(\mathbb{R})$ der Pfad $t \to g(X_t)$ die stetige quadratische Variation

$$\langle g(X) \rangle_t = \int_0^t \left(g'(X_s)\right)^2\, d\langle X \rangle_s$$

besitzt.

Aufgabe 4: Es sei X ein stetiger reellwertiger Pfad mit stetiger quadratischer Variation $\langle X \rangle$ entlang einer festen, aufsteigenden Folge (ζ_n) von Zerlegungen. Für $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $\alpha \in [0,1]$ definieren wir das allgemeine *(Fisk-)Stratonovitch-Integral*

$$\int_0^t f(X_s)\, d_\alpha X_s := \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i \in \zeta_n \\ t_{i+1} \le t}} f\left((X_{t_i}) + \alpha(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\right)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}).$$

Man zeige, dass dieser Limes existiert und das Integral somit wohldefiniert ist und dass

$$\int_0^t f(X_s)\, d_\alpha X_s = \int_0^t f(X_s)\, dX_s + \alpha \int_0^t f'(X_s)\, d\langle X \rangle_s .$$

gilt.