Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Sommersemester 2004

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

9.Blatt
Übungen 05.07.04
Abgaben bis 12.07.04

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Sei X der Koordinatenprozess auf dem Wiener-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und

$$F = \int_0^T f(t)\, dX_t$$

für ein $f \in L^2[0,T]$. Dann ist F für P-f.a. $\omega \in \Omega$ definiert. Man zeige:

a) Das Wiener-Maß hat vollen Träger auf $C[0,T] \cap \{f(0) = 0\}$ bezüglich der durch die Supremumsnorm definierten Topologie.

b) F lässt sich genau dann zu einer auf ganz $C[0,T]$ stetigen Linearform fortsetzen, falls f von der Form $f(t) = \mu\left((t,T]\right)$ ist für ein endliches signiertes Maß μ auf $[0,T]$. Genau in diesem Fall ist F auch Fréchet-differenzierbar. Man berechne die Fréchet-Ableitung.

2.Aufgabe: Sei ν die Stadardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^d$, ∇ der übliche euklidische Gradient.

a) Man berechne den zu ∇ in $L^2(\nu)$ adjungierten Operator $-div_\nu$, d.h.

$$\int \nabla f(x) \cdot V(x)\, \nu(dx) = -\int f(x) div_\nu V(x)\, \nu(dx)$$

für alle $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ und alle glatten Vektorfelder V mit beschränkten Ableitungen.

b) Man berechne den *Ornstein-Uhlenbeck-Operator* $L = div_\nu \nabla$.

c) Mit H_p bezeichnen wir das p-te Hermite-Polynom (vgl. Übung). Für $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ sei dann

$$H_{\vec{p}}(x) = \prod_i H_{p_i}(x_i).$$

Man zeige, dass diese Eigenfunktionen des Ornstein-Uhlenbeck-Operators sind und man berechne die zugehörigen Eigenwerte.

Jede Aufgabe 12 Punkte