Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Sommersemester 2004

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

8.Blatt
Übungen 28.06.04
Abgaben bis 01.07.04

Hausaufgabe

1.Aufgabe: Im Black-Scholes-Modell ist der Preis einer europäischen Call-Option eine konvexe Funktion des Anfangswerts x. Wenn die Volatilität eine *pfadabhänginge* Funktion des Preisprozesses ist, kann die Konvexität verletzt sein, wie das folgende Beispiel zeigt:
Sei

$$S_t^x := x \exp\left(\int_0^t \sigma_u \, dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_u^2 \, du\right)$$

für eine Brownsche Bewegung W und

$$\sigma_t := I_{\{W_t < S_0\}} I_{\{t \leq \tau_a\}} \qquad \text{für} \qquad \tau_a := \inf\{t : W_t = a\}.$$

Mit der Tanaka-Formel zeige man:

(a)
$$S_1^x \leq x \exp\left(\frac{1}{2} L^x_{\tau_a \wedge 1} + x\right)$$
für alle x und schließe daraus, dass der Preis $v(x,1)$ der europäischen Call-Option $(S_1^x - K)^+$ für $K := ae^a$ sowohl $v(a,1) = 0$ als auch $v(x,1) \to 0$ für $x \downarrow 0$ erfüllt.

(b) Für $x \in (0,a)$ gilt P-fast sicher auf $\tau_a \leq 1$
$$S_1^x \geq x \exp\left(\frac{1}{2} L^x_{\tau_a} + x - \frac{1}{2}\right).$$
Man kann zeigen (ohne Beweis), dass $L^x_{\tau_a}$ auf $\{\tau_a \leq 1\}$ nach oben unbeschränkt ist. Hieraus folgere man $v(x,1) > 0$ für $0 < x < a$. Die Funktion $v(\cdot,1)$ kann also nicht konvex sein.

Aufgabe 12 Punkte