Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Sommersemester 2004

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

7.Blatt
Übungen 21.06.04
Abgaben bis 24.06.04

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Sei
$$P := \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n$$
für $\alpha_i > 0$ mit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ und n auf $\mathcal{F}_0$ zueinander singuläre Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P_1, \ldots, P_n$ auf $C[0,T]$. Mit X bezeichnen wir den Koordinatenprozess auf $C[0,T]$, mit $\mathcal{F}_t$ die rechtsstetige (aber nicht vervollständigte) Filtration.

(a) Man charakterisiere die Menge $\mathcal{P}$ aller zu P äquivalenten Martingalmaße für X durch die Mengen $\mathcal{P}_i$ aller zu P_i äquivalenten Martingalmaße $i = 1, \ldots, n$.

(b) Ist die Bedingung der paarweisen Singularität auf $\mathcal{F}_0$ erfüllt, wenn die P_i die Verteilungen geometrischer Brownscher Bewegungen mit paarweise verschiedenen Volatilitäten $\sigma_i > 0$ sind? Man beschreibe das dabei entstehende P anschaulich als ein (zweistufiges) Black-Scholes-Modell mit konstanter Volatilität, die in einem ersten Schritt zufällig festgelegt wird.

2.Aufgabe: **(Das Volatilitätssprungmodell)** Wir betrachten das folgende Modell für einen Finanzmarkt mit stochastischer Volatilität: Die risikolose Zinsrate r sei 0, W sei eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und der Preisprozess S sei gegeben durch
$$S_t = \exp\left(\int_0^t \sigma_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 \, ds\right),$$
wobei σ_s für $s < T/2$ konstant $\sigma_0 > 0$ sei. In $T/2$ springt die Volatilität auf den zufälligen Wert $\sigma_{T/2} > 0$ und bleibt dort, d.h. $\sigma_t = \sigma_{T/2}$ für $T/2 \leq t \leq T$. Wir nehmen an, dass $\sigma_{T/2}$ und W unabhängig seien, und dass $\sigma_{T/2}$ eine nichttriviale Verteilung besitzt. Man zeige, dass dieses Modell unvollständig ist.

3.Aufgabe: Wir betrachten ein Marktmodell mit einem Bond $B_t = \exp\left(\int_0^t r_s \, ds\right)$, definiert durch einen beschränkten progressiv messbaren Shortrate-Prozess r, und mit einer riskanten Anlage $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$, die einer stochastische Differentialgleichung der Form
$$dS_t = \sigma_t S_t \, dX_t + b_t S_t \, dt$$
genüge. Hierbei sei X eine Brownsche Bewegung, und σ sowie b seien zwei progressiv meßbare Prozesse mit $\sigma_t \geq \varepsilon > 0$ und $|b_t| \leq c < \infty$ P-f.s. für alle $t \in [0,T]$ und zwei Konstanten ε und c. Man gebe die Dichte eines äquivalenten lokalen Martingalmaßes an.

Jede Aufgabe 8 Punkte