Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Sommersemester 2004

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

6.Blatt
Übungen 07.06.04
Abgaben bis 10.06.04

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Aus Itô's Darstellungssatz für Wiener-Funktionale in $\mathcal{L}^2$ (Satz VI.2.1 der Vorlesung) folgere man die Martingaldarstellungseigenschaft der Brownschen Bewegung: Sei M ein lokales Martingal auf dem Wiener-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Koordinatenprozeß X. Dann gibt es ein progressiv meßbares ξ mit $\int_0^t \xi_s^2 \, ds < \infty$ P-fast sicher für alle t, so dass

$$M_t = M_0 + \int_0^t \xi_s \, dX_s \quad P\text{-f.s. für alle } t\,,$$

Insbesondere folgt daraus, dass M eine stetige Modifikation besitzt und ξ $dt \otimes dP$-fast überall eindeutig festgelegt ist.

2.Aufgabe: Man zeige, dass die im Black-Scholes Modell durch die geometrische Brownsche Bewegung generierten Maße auf $C[0,T]$ für verschiedene Volatilitäten singulär sind. Exakter: Für eine Brownsche Bewegung W und $|\sigma_1| \neq |\sigma_2|$ sind die durch

$$S_t^i = e^{\sigma_i W_t - \frac{1}{2}\sigma_i^2 t}\,, \quad i \in \{1,2\}$$

implizierten Maße $P_i = (S^i)_* P := P \circ (S^i)^{-1}$ auf $C[0,T]$ singulär: $P_1 \perp P_2$ (d.h. es gibt eine messbare Menge A mit $P_1[\,A\,] = 0$ und $P_2[\,A\,] = 1$).

3.Aufgabe: In unserem allgemeinen Marktmodell gilt die folgende Aussage: Ein Maß $Q \approx P$ ist genau dann ein äquivalentes lokales Martingalmaß, wenn $M_t := S_t - \int_0^t r_u S_u \, du$ ein lokales Martingal unter Q ist.

4.Aufgabe: Sei P das Wiener-Maß auf $C[0,\infty]$ und X der Koordintenprozeß.

a) Sei $\tilde{P}$ die Verteilung von $X_t + t$ $(t \geq 0)$ und τ eine Stoppzeit mit $P[\tau < \infty] = 1$. Man zeige

$$E[e^{X_\tau - \frac{1}{2}\tau}] = \tilde{P}[\tau < \infty]\,.$$

b) Man folgere die Identität

$$E[e^{\frac{1}{2}\tau_c}] = e^c$$

für

$$\tau_c := \inf\{t > 0 \,:\, X_t - t = -c\}\,, \quad c > 0\,.$$