Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Sommersemester 2004

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

5.Blatt
Übungen 24.05.04
Abgaben bis 03.06.04

Übungen

1.Aufgabe: Für ein stetiges lokales Martingal M gilt $\langle M \rangle \equiv 0$ genau dann, wenn $M_t - M_0 = 0$ für jedes t P-f.s.

2.Aufgabe: Man zeige, dass ein stetiges lokales Martingal M und seine quadratische Variation $\langle M \rangle$ dieselben Konstantheitsintervalle haben, das heißt, dass für P-fast alle ω gilt:

$$M_t(\omega) = M_a(\omega) \qquad \text{für } t \in [a, b]$$

genau dann, wenn

$$\langle M \rangle_b (\omega) = \langle M \rangle_a (\omega) .$$

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Sei X_t ein rechtsstetiger stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ adaptiert an die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\le t}$.

a) Man zeige, dass, falls X ein nach unten beschränktes lokales Martingal ist, es auch ein Supermartingal ist.

b) Sei nun X ein positives Supermartingal. Man zeige die folgende Absorptionseigenschaft: Für

$$\tau := \inf\{t \ge 0 : X_t = 0\}$$

gilt $X_t = 0$ für $t \ge \tau$ P-f.s.

2.Aufgabe: Wir betrachten das Black-Scholes-Modell mit Zinsrate $r = 0$, Volatilität $\sigma = 1$ und Trend $\alpha = 0$, d.h. wir haben ein Marktmodell mit Bond $B_t \equiv 1$ und riskanter Anlage $S_t = \exp(X_t - t/2)$ für eine Brownsche Bewegung X. Man konstruiere eine zahme selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi = (\xi, \eta)$ mit $V_0(\varphi) = 1$ und $V_1(\varphi) = 0$ P-f.s. ("*Suicide Strategy*").

3.Aufgabe: Sei X eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $f_1, \dots, f_n$ stetige und beschränkte Funktionen auf $\mathbb{R}$, $0 \le t_1 < \dots < t_n \le T$ und

$$H := \prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i})\,.$$

Man konstruiere einen progressiv messsbaren Prozess ξ mit

$$H = E[\,H\,] + \int_0^T \xi_s \, dX_s\,,$$

indem man sukzessive auf den Intervallen $[t_{n-1}, t_n], \dots, [t_0, t_1]$ die (duale) Wärmeleitungsgleichung mit geeigneten Randbedingungen löst. Man zeige weiterhin, dass $\int \xi \, dX$ ein quadratintegrierbares Martingal ist.
Bemerkung: Im Kontext eines Finanzmarktmodells lässt sich H als Auszahlungsfunktion einer sogenannten Fade-Option oder einer asiatischen Option mit geometrischer Mittelung interpretieren.

4.Aufgabe:

a) Bezeichne ν_a die Normalverteilung $N(a, \sigma^2)$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$. Man berechne $d\nu_a/d\nu_0$.

b) Sei $(X_t)_{0\le t\le T}$ eine Brownsche Bewegung unter dem Maß P; wir definieren für ein festes $b \in \mathbb{R}$ das Maß $\tilde{P}$ durch

$$d\tilde{P} := e^{bX_T - \frac{1}{2}b^2 T} dP\,.$$

Man folgere aus a) und dem Satz von Lévy, dass $\tilde{X}_t := X_t - bt$ eine Brownsche Bewegung unter $\tilde{P}$ ist.

c) Man benutze b) um ein äquivalentes Martingalmaß im Black-Scholes Modell anzugeben.