Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Sommersemester 2004

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

4.Blatt
Übungen 17.04.04
Abgaben bis 20.04.04

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Man zeige, dass für eine monoton wachsende Folge von Stoppzeiten $\tau_n \uparrow \infty$ die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) M ist ein lokales Martingal.

(ii) M^{τ_n} ist ein lokales Martingal für jedes n.

2.Aufgabe: Sei X eine Brownsche Bewegung und $f \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R})$ mit

$$|f(s,x)| \leq c_t e^{c_t|x|} \qquad \forall\, s \leq t,\, \forall\, t,\, x.$$

a) Man zeige, dass $\int\limits_0^t f(s,X_s)dX_s$ ein Martingal ist.

b) Hiermit zeige man, dass für den Black-Scholes Preis v der Option $H = (S_T - c)^+$ der abgezinste Wertprozess $e^{-rt}v(t,S_t)$ ein Martingal ist.

3.Aufgabe: Sei X eine Brownsche Bewegung und V der *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess* mit Parametern $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$:

$$V_t = e^{\alpha t}\left(V_0 + \int\limits_0^t e^{-\alpha s}\sigma\, dX_s\right).$$

Man zeige:

a) V löst die stochastische Differentialgleichung

$$dV_t = \sigma\, dX_t + \alpha V_t\, dt\,.$$

b) Es gibt eine Brownsche Bewegung B, so daß V die folgende Form besitzt:

$$V_t = e^{\alpha t}\left(V_0 + \sigma B_{\frac{1-e^{-2\alpha t}}{2\alpha}}\right).$$

Bemerkung: In der Finanzmathematik werden Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse zur Modellierung der Dynamik von Zinsstrukturkurven benutzt und als "Vasicek-Modell" bezeichnet.

4.Aufgabe: Sei X eine d-dimensionale Brownsche Bewegung für $d \geq 3$. Man zeige, dass für $x \neq 0$ der Prozess $|x + X_t|^{2-d}$ ein lokales Martingal, aber kein Martingal ist. Es darf benutzt werden, dass P-fast jeder Pfad den Punkt $-x \neq 0$ nicht trifft (dies gilt in Dimension $d \geq 2$).

Jede Aufgabe 6 Punkte