Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Sommersemester 2004

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

3.Blatt
Übungen 10.05.04
Abgaben bis 13.05.04

Übungen

1.Aufgabe: Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $t \geq 0$, für eine σ-Algebra $\mathcal{F}$. Man zeige:

(a) Für eine Stoppzeit τ ist

$$\mathcal{F}_\tau := \{\, A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \,\}$$

eine σ-Algebra, und es gilt $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$, falls σ eine Stoppzeit mit $\sigma \leq \tau$ ist.

(b) Mit τ und σ sind auch $\tau \vee \sigma$ und $\tau \wedge \sigma$ Stoppzeiten.

(c) Ist $(\mathcal{F}_t)$ rechtsstetig, so ist τ genau dann eine Stoppzeit, wenn $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$; weiters sind für eine Folge (τ_n) von Stoppzeiten dann auch $\sup_n \tau_n$, $\inf_n \tau_n$, $\liminf_n \tau_n$ sowie $\limsup_n \tau_n$ wieder Stoppzeiten.

2.Aufgabe: Für ein signiertes Radon-Maß μ und ein positives endliches Radon-Maß ν auf $[0,\infty)$ gilt, dass μ genau dann absolutstetig bezüglich ν ist ($\mu \ll \nu$), wenn für alle offenen Intervalle $I \subset [0,\infty)$ gilt, dass

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \qquad \nu(I) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\mu(I)| < \varepsilon\,.$$

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Seien X und Y zwei feste stetige Pfade mit stetigen quadratischen Variationen $\langle X\rangle$, $\langle Y\rangle$ und mit stetiger Kovariation $\langle X,Y\rangle$. Wir fassen (analog zur Definition des Stieltjes-Integrals) $\langle X,Y\rangle$ als Verteilungsfunktion eines signierten Maßes μ auf $[0,\infty)$ auf und bezeichnen mit $|\langle X,Y\rangle|$ den Integrator des Integrals bezüglich der Variation $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, die man aus der Jordan-Zerlegung $\mu = \mu^+ - \mu^-$ von μ erhält. Man zeige mit Hilfe von Aufgabe 2 der Übungen:

(a) $|d\langle X,Y\rangle|$ ist absolutstetig sowohl bezüglich $d\langle X\rangle$ als auch bezüglich $d\langle Y\rangle$.

(b) Sind H und K zwei messbare Funktionen auf $[0,\infty)$, so gilt die folgende Ungleichung:

$$\int_0^t |H_s|\,|K_s|\,|d\langle X,Y\rangle|_s \leq \sqrt{\int_0^t H_s^2\,d\langle X\rangle_s}\cdot\sqrt{\int_0^t K_s^2\,d\langle Y\rangle_s}\,.$$

2.Aufgabe: Der Preisprozess einer Aktie sei durch einen stetigen Pfad S_t, $t\in[0,T]$ mit stetiger quadratischer Variation $\langle S\rangle$ gegegeben und es exitiere ein $t_0\in(0,T)$, wo die Abbildung $t\mapsto S_t$ differenzierbar ist mit $S'_{t_0}\neq 0$. Man zeige, dass ein Markt, der aus dieser Aktie und einem Bond $B_t = 1$ besteht, eine (pfadweise) Arbitragemöglichkeit zulässt.

3.Aufgabe: Sei M ein stetiges Martingal, $0 = t_0 < t_1 < \cdots t_n$ eine Folge von Zeitpunkten und ξ ein adaptierter und beschränkter Prozess. Dann ist auch das "Spielsystem"

$$S_t := \sum_{i=1}^n \xi_{t_{i-1}}(M_{t_i\wedge t} - M_{t_{i-1}\wedge t})\,, \qquad t\geq 0\,,$$

ein stetiges Martingal.

Jede Aufgabe 8 Punkte