Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Sommersemester 2004

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

2.Blatt
Übungen 03.05.04
Abgaben bis 06.05.04

Übungen

1.Aufgabe: Man zeige, dass die Stetigkeit eines Pfades X_t, $t \geq 0$ mit beschränkter quadratischer Variation $\langle X \rangle$ keine hinreichende Bedingung für die Stetigkeit des quadratischen Variationsprozesses $\langle X \rangle_t$ ist.

2.Aufgabe: Man beweise die Itô-Formel für die geometrische Brownsche Bewegung

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma X_t + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right) \; :$$

Ist $f(t,z)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf $(0,\infty)^2$, so gilt

$$\begin{aligned} df(t,S_t) &= f_z(t,S_t)\,dS_t + (L_0 f(t,S_t) + f_t(t,S_t))\;dt \\ &= f_z(t,S_t)\sigma S_t\,dX_t + (L_\alpha f(t,S_t) + f_t(t,S_t))\;dt\,, \end{aligned}$$

wobei für $\alpha \in \mathbb{R}$ der Differentialoperator L_α gegeben sei durch

$$L_\alpha f(t,z) = \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 f_{zz}(t,z) + \alpha z f_z(t,z)\,.$$

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Im pfadweisen Itô-Kalkül sind die Analoga von Sinus, Cosinus sowie der Exponentialfunktion gegeben durch

$$S(X)_t := e^{\frac{1}{2}\langle X\rangle_t} \sin X_t, \qquad C(X)_t := e^{\frac{1}{2}\langle X\rangle_t} \cos X_t \qquad \text{und} \qquad E(X)_t := e^{X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t}.$$

Man zeige, dass sie die stochastischen Differentialgleichungen

$$dS(X)_t = C(X)_t \, dX_t \qquad \text{und} \qquad dC(X)_t = -S(X)_t \, dX_t$$

erfüllen und dass

$$E(iX)_t = C(X)_t + iS(X)_t$$

gilt.

2.Aufgabe: Viele exotische Optionen hängen von Funktionalen des Pfades $(S_t)_{0\le t\le T}$ wie $\max\limits_{0\le t\le T} S_t$ oder $\int\limits_0^T S_t \, dt$ ab. Im folgenden sei S eine geometrische Brownsche Bewegung mit Volatilität σ und Trend α.

a) Man entwickle pfadweise Itô-Formeln für Funktionen der Prozesse (t, S_t, A_t) und (t, S_t, M_t), wobei

$$A_t := \int\limits_0^t S_s \, ds \qquad \text{und} \qquad M_t := \max_{0\le s\le t} S_s.$$

b) In Analogie zu Satz II.2.1 gebe man partielle Differentialgleichungen an, die eine Funktion $v : [0,\infty) \times (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ erfüllen sollte, damit $v(t, S_t, A_t)$ bzw. $v(t, S_t, M_t)$ Wertprozesse selbstfinanzierender Handelsstrategien sind.

3.Aufgabe: Für Treppenfunktionen $b : [0,1) \to \mathbb{R}$, der Form

$$b(t) = \sum_i b_i 1_{[t_i,t_{i+1})}(t)\,,$$

$0 \le t_1 < t_2 < ... < t_n < 1$, und eine Brownsche Bewegung X sei das Itô-Integral via

$$\int\limits_0^1 b(s) dX_s := \sum_i b_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

definiert. Sei $\mathcal{E}$ die Menge aller solcher Treppenfunktionen.

a) Für $b \in \mathcal{E}$ berechne man die Verteilung von $\int\limits_0^1 b(s) dX_s$ und zeige insbesonders, dass

$$\begin{aligned} E\left(\int\limits_0^1 b(s)\, dX_s\right) &= 0 \qquad \text{und} \\ E\left(\left(\int\limits_0^1 b(s)\, dX_s\right)^2\right) &= \int\limits_0^1 b^2(s)\, ds \end{aligned}$$

gilt.

b) Durch $b \mapsto \int\limits_0^1 b(s)\, dX_s$ ist somit eine Isometrie $L^2[0,1] \supset \mathcal{E} \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben. Durch geeignete Approximation beliebiger L^2-Funktionen setze man sie zu einer auf ganz $L^2[0,1]$ definierten Abbildung $b \mapsto \int\limits_0^1 b(s)\, dX_s$ fort.

c) Was ist die Verteilung von $\int\limits_0^1 b(s)\, dX_s$ für $b \in L^2[0,1]$ beliebig? Man zeige weiter, dass $\int\limits_0^1 b(s)\, dX_s$ für $b \in BV \subset L^2[0,1]$ P-fast sicher mit dem Itô-Integral von b bezüglich X übereinstimmt.

Jede Aufgabe 8 Punkte