Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Alexander Schied
Übungen: Stephan Sturm

Sommersemester 2004

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik II

1.Blatt
Übungen 26.04.04
Abgaben bis 29.04.04

Übungen

1.Aufgabe: Man zeige, dass P-fast jeder Pfad einer Brownschen Bewegung von lokal unendlicher Variation ist.

2.Aufgabe: Sei X_t, $t \geq 0$ ein stetiger Pfad mit stetiger quadratischer Variation $\langle X \rangle$ und $f \in C^2(\mathbb{R})$. Man zeige, dass

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) \circ dX_s$$

für das *(Fisk-)Stratonovich Integral*

$$\int_0^t f'(X_s) \circ dX_s := \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{t_i \in \tau_n, t_{i+1} \leq t} f' \left(\frac{X_{t_i} + X_{t_{i+1}}}{2} \right) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

gilt.

3.Aufgabe: Sei X_t, $t \geq 0$ ein stetiger Pfad mit stetiger quadratischer Variation $\langle X \rangle$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$. Man zeige, dass dann der Pfad $f(X_t), t \geq 0$ die quadratische Variation

$$\langle f(X) \rangle_t = \int_0^t f'(X_s)^2 d \langle X \rangle_s$$

besitzt.

Hausaufgaben

1.Aufgabe: Man zeige, dass P-fast jeder Pfad nirgends lokal Hölder-stetig ist für $\alpha > \frac{1}{2}$, d.h., dass für $0 \leq u < v$ P-fast sicher gilt, dass

$$\sup_{u \leq s < t \leq v} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha} = +\infty.$$

2.Aufgabe: a) Sei X_t, $t \geq 0$ ein stetiger Pfad mit stetiger quadratischer Variation $\langle X \rangle$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$. Wie sieht das Analogon zur Itô-Formel aus, wenn man das Integral durch

$$\int_0^t f(X_s) * dX_s := \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{t_i \in \tau_n, t_{i+1} \leq t} f(X_{t_{i+1}})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}).$$

definiert?
b) Wie lässt sich dies für beliebige Unterteilungspunkte

$$f(\lambda X_{t_i} + (1-\lambda) X_{t_{i+1}}), \quad \lambda \in [0,1] \text{ fest},$$

verallgemeinern?

3.Aufgabe: (a) Man berechne für einen typischen Brownschen Pfad B_t die folgenden Integrale:

$$\text{(i)} \quad \int_0^t B_s dB_s \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^t B_s \circ dB_s$$

$$\text{(iii)} \quad \int_0^t B_s * dB_s \qquad \text{(iv)} \quad \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2B_s^1 & 0 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} B_s^1 \\ B_s^2 \end{pmatrix},$$

wobei B^1 und B^2 jeweils typische Pfade zweier unabhängiger Brownscher Bewegungen sind.
(b) Für zwei unabhängige Brownsche Bewegungen B, W definieren wir

$$X_t := \rho B_t + \alpha W_t, \qquad t \geq 0, \quad \rho, \alpha \in [0,1].$$

Man bestimme α so, dass X wieder eine Brownsche Bewegung ist und berechne $\langle X, B \rangle_t$ und $\langle X, W \rangle_t$.
Bemerkung: Man sagt, die Brownschen Bewegungen X und B haben Korrelation ρ.

4.Aufgabe: Sei X_t, $t \geq 0$ ein stetiger Pfad mit stetiger quadratischer Variation $\langle X \rangle$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$, $G \in C^2(\mathbb{R})$ und $b \in C^1(\mathbb{R})$.
(a) Man zeige, dass das via nichtantizipativen Riemann-Summen definierte Itô-Integral

$$\int_0^t f(X_s) dG(X_s)$$

existiert und dass

$$\int_0^t f(X_s) dG(X_s) = \int_0^t f(X_s) G'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f(X_s) G''(X_s) d\langle X \rangle_s$$

gilt.
(b) Ferner zeige man, dass

$$Y_t := e^{\int_0^t b(X_s) dX_s - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(X_s) d\langle X \rangle_s}$$

der stochastischen Differentialgleichung

$$dY_t = Y_t b(X_t) dX_t$$

genügt.

Anmerkung: Man begründe auch, warum das Itô-Integral $\int_0^t Y_s b(X_s) dX_s$ wohldefiniert ist.

Jede Aufgabe 6 Punkte