

Technische Universität Berlin  
 Fakultät II - Institut für Mathematik  
 Vorlesung: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel / Prof. Dr. Alexander Schied  
 Übung: Stephan Sturm  
 Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Wintersemester 2006/07

## Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik I

9. Blatt

Übung: 18.12.06  
 Abgabe: 08.01.07

**Aufgabe 1:** Man zeige, dass  $P$ -fast jeder Pfad einer Brownschen Bewegung  $(B_t)$  auf  $[0, 1]$

- i) von lokal unendlicher Totalvariation ist.
- ii) nirgends Hölder-stetig ist für  $\alpha > 1/2$ , das heißt, dass für  $0 \leq u < v \leq 1$   $P$ -fast sicher gilt, dass

$$\sup_{u \leq s < t \leq v} \frac{|B_t - B_s|}{|t - s|^\alpha} = +\infty.$$

**Aufgabe 2:** Mit Hilfe der Methode der Monte-Carlo-Integration (10.000 Evaluationen) berechne man für ein Black-Scholes-Modell mit Parametern  $S_0 = 100$ ,  $r = 0,1$ ,  $\sigma = 0,25$  und  $T = 12$  den Preis der folgenden Optionen:

- i) Einem Europäischen Call mit Strike  $K = 110$ , Man vergleiche dieses Resultat mit einer exakten Berechnung via Black-Scholes-Formel und der numerischen Berechnung im Binomialmodell von Blatt 7.
- ii) Einer Forward-Start Option  $H = (\frac{S_T}{S_t} - K)^+$  mit  $t = 6$  und  $K = 1,5$ . (Beachte, dass  $S_T$  und  $S_t$  nicht unabhängig voneinander sind!)

Abzugeben sind ein wohlkonstruiertes und kommentiertes Programmlisting in einer höheren Programmiersprache und die Resultate der Beispiele.

**Aufgabe 3:** Mit Hilfe des *Lemmas von Garsia, Rademich und Rumsey* beweise man den Satz von Kolmogorov-Čentsov:

Angenommen es gibt reelwertige Konstanten  $\gamma \geq 1$ ,  $c > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  und ein Maß  $P$  auf dem  $\mathbb{R}^N$ , so dass die Funktionen  $\varphi : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^N$  die Ungleichung

$$E[|\varphi(t) - \varphi(s)|^\gamma] \leq c|t - s|^{1+\varepsilon}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

für ein  $T \in (0, \infty)$  erfüllen. Dann existiert für jedes  $\alpha \in (0, \varepsilon/\gamma)$  eine Konstante  $K$  (abhängig von  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  und  $T$ ), so dass

$$P\left(\left\{\varphi : \sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{|\varphi(t) - \varphi(s)|}{|t - s|^\alpha} \geq R\right\}\right) \leq \frac{Kc}{R^\gamma}$$

für alle  $R \in (0, \infty)$ .

**Weihnachtsaufgabe:** Wir betrachten ein Binomialmodell mit  $T = 28$ . Die *Weihnachtsbaum-Option* ist wie folgt definiert: In den Zeitpunkten 2, 7, 12, 16, 21, und 26 erhält man je eine Million Euro, sofern der Kurs bis zur Zeit 14 außer im fünften und zehnten Schritt immer steigt und anschließend außer im 19. und 24. Schritt immer fällt. Die Auszahlung wird so geregelt, dass alle Beträge, verzinst mit dem risikolosen Zinssatz  $r$ , erst am Schluss ausgezahlt werden.

- i) Man erkläre den Namen der Option an Hand einer geeigneten Graphik.
- ii) Man bestimme den Wert der Option für  $b = 0,25$ ,  $a = -0,2$ ,  $r=0,1$ .