Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel / Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik I

8.Blatt
Übung: 11.12.06
Abgabe: 18.12.06

Aufgabe 1: Es sei $v(x,T) = x\Phi(d_+(x,T)) - Ke^{-rT}\Phi(d_-(x,T))$ der Black-Scholes-Preis einer europäischen Call-Option mit Strike K und Maturität T. Beweise die folgenden Formeln für die *Greeks* Δ, Γ, Θ

$$\begin{aligned}
\Delta(x,T) := \frac{\partial}{\partial x} v(x,T) &= \Phi(d_+(x,T)),\\
\Gamma(x,T) := \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,T) &= \varphi(d_+(x,T))\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}},\\
\Theta(x,T) := \frac{\partial}{\partial T} v(x,T) &= \frac{x\sigma}{2\sqrt{T}}\varphi(d_+(x,T)) + Kre^{-rT}\Phi(d_-(x,T)),
\end{aligned}$$

wobei $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ die Dichte der Normalverteilung ist. Ferner zeige man, dass v die *Black-Scholes-Differentialgleichung*

$$rv(x,T) = rx\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial T}$$

erfüllt.

Aufgabe 2: Das Ausahlungsprofil einer *Paylater*-Option ist durch

$$C = (S_T - (K+c))1_{\{S_T \geq K\}}$$

gegeben, wobei die Konstante c so bestimmt wird, dass der Preis der Option zum Zeitpunkt 0 gleich 0 ist. Man bestimme den Preis der Option für einen Zeitpunkt $t < T$.

Aufgabe 3: Es seien K, r, T, S_T fest. Die implizite Volatilität $\hat{\sigma}$ zu $v_0 > 0$ ist derjenige Wert, den man für σ in der *Black-Scholes-Formel* einsetzen muss, damit man den Optionspreis v_0 erhält. Man formuliere das Problem mathematisch, bestimme für welche v_0 eine implizite Volatilität existiert und begründe, warum diese eindeutig ist.

Bitte wenden

Aufgabe 4: Wir betrachten ein multiplikatives Trinomialmodell. Die Anlage S^0 sei konstant 1 und die Anlage S^1 mit Startwert S_0^1 entwickle sich nach folgender Gleichung:

$$S_t^1 = S_0^1 \prod_{k=1}^{t} Y_k, \qquad t \in \{0, \dots, T\}$$

mit unabhängigen und identisch verteilten Inkrementen Y_i. Für die Inkremente gelte weiterhin $P(Y_1 = 1 + b) = p_1$, $P(Y_1 = 1) = p_2$ und $P(Y_1 = 1 + a) = p_3$ mit $0 < p_i < 1$, $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$, $a < 0$, $b > 0$, $(1 + a)(1 + b) = 1$. Die Filtration $(\mathcal{F})$ sei von S erzeugt.

i) Man bestimme die äquivalenten Martingalmaße P^* für S durch Angabe der Übergangswahrscheinlichkeiten $P^*(Y_{t+1} = x|\mathcal{F}_t)$, $x \in \{1 + a, 1, 1 + b\}$. Man bestimme die Fälle, in denen die Y_i unter P^* wieder unabhängig und identisch vertelt sind.

ii) In diesem Fall berechne man alle möglichen Werte einer europäischen Call-Option mit Strikepreis K und Maturität $T = 3$.

iii) Für $T = 2$ bestimme man ein äquivalentes Martingalmaß P_0^* für S, unter dem die Y_i nicht mehr unabhängig sind.