Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel / Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik I

7.Blatt
Übung: 4.12.06
Abgabe: 11.12.06

Aufgabe 1: Wir betrachten das arbitragegfreie Binomialmodell:

a) Es sei $0 < t < T$; man bestimme den Preis und eine Absicherungsstrategie für die Forward-Start-Option, deren Auszahlungsprofil durch

$$\left(\frac{S_T}{S_t} - K\right)^+$$

gegeben ist.

b) Man bestimme den Preis und eine Absicherungsstrategie für die europäische Put-Option, deren Auszahlungsprofil durch

$$(K - S_T)^+$$

gegeben ist. Man zeige, dass für die Put-Option der Aktienanteil ξ_t immer nicht-positiv ist. Man skizziere die Wertfunktion $V(x)$ und zeige, dass es für $R > 0$ genau ein $x_0 \in (0, K)$ mit $V(x_0) = (K - x_0)^+$ gibt.

Aufgabe 2: Im arbitragefreien Binomialmodell definieren wir

$$Y_t := \sum_{k=T_0}^{t} S_k \qquad \text{und} \qquad M_t = \max_{0 \leq u \leq t} S_u$$

für ein festes T_0. Sei H eine diskontierte Option mit Auszahlungsprofil

$$H = h(S_T, Y_T, M_T).$$

Diese Klasse umfasst unter anderem die asiatischen Optionen (mit $h(s, y, m) = h(zy)$) sowie die Barrier- und Lookback-Optionen ($h(s, y, m) = h(s, m)$). Man zeige, dass der Wertprozess von H von der Form

$$V_t = v_t(S_t, Y_t, M_t)$$

ist.

Aufgabe 3: Man schreibe in einer höheren Programmiersprache ein Programm, das für frei wählbare Parameter r, a, b, S_0, T den arbitragefreien Preis europäischer Optionen im Binomialmodell ermittelt. Das Programm soll für jede Option der Form $H = h(S_T)$, aber auch für jede Option, die sich als Funktion der gesamten Kursentwicklung $(S_0, S_1, \dots, S_T)$ schreiben lässt, den arbitragefreien Preis berechnen können.
Abzugeben sind ein wohlkonstruiertes und kommentiertes Programmlisting und die Resultate für die folgenden Beispiele:

a) Sei $r = 0,1$, $b = 0,3$, $a = -0,2$, $T = 12$ und $S_0 = 100$. Man bewerte die folgenden Optionen:
   - (i) Europäischer Call $H = (S_T - K)^+$ mit Strike $K = 110$.
   - (ii) Europäischer Put $H = (K - S_T)^+$ mit Strike $K = 110$.
   - (iii) Lookback Call $H = S_T - \min\limits_{k \in \{0,\dots,T\}} S_k$.
   - (iv) Average Put $H = (K - \frac{1}{T+1} \sum_{k=0}^{T} S_k)^+$ mit Strike $K = 110$.
   - (v) Forward-Start-Option $H = (\frac{S_T}{S_t} - K)^+$ mit $t = 6$ und Strike $K = 110$.
   - (vi) Down-and-Out-Call $H = (S_T - K)^+ 1_{\{\min\limits_{k \in \{0,\dots,T\}} S_k \geq B\}}$ mit Strike $K = 110$ und Knock-Out-Schranke $B = 70$.

b) Betrachte für r, a, b, S_0 und T wie in a) den arbitragefreien Preis einer europäischen Call-Option $H = (S_T - K)^+$ als Funktion des Strikepreises K und plotte den Graphen dieser Funktion. Wie sieht der Graph für $T = 1$ aus?

c) Bewerte den Europäischen Call aus a) zur Zeit 0 für $r = 0,2$ bei ansonsten gleichen Parametern und versuche das Ergebnis zu erklären.

Jede Aufgabe 8 Punkte. Zwei zufällig ausgewählte Aufgaben werden korrigiert und die erreichte Punktezahl mit 1,5 multipliziert.