Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel / Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik I

6.Blatt
Übung: 29.11.06
Abgabe: 4.12.06

Aufgabe 1: Man beweise oder widerlege die folgende Aussage: In einem arbitragefreien Mehrperioden-Marktmodell ist jeder Contigent Claim der Form

$$\sum_{t=0}^{T} \beta_t \cdot S_t, \qquad \beta_t^i \geq 0$$

erreichbar.

Aufgabe 2: Es sei ein Marktmodell mit zwei Anlagen gegeben, die wie üblich durch einen an $(\mathcal{F}_T)_{t=0,\dots,T}$ adaptierten Prozess $S = (S^0, S^1)$ modelliert werden.

a) Welche der folgenden Prozesse sind bezgl. $(\mathcal{F}_t)$ prävisivbel, welche im Allgemeinen nicht?
   i) $\xi = (1_{\{S_t^1 > S_{t-1}^1\}})_{t=1,\dots,T}$;
   ii) $\xi_{t=1,\dots,T}$ mit $\xi_1 = 1$ und $\xi_t = 1_{\{S_{t-1}^1 > S_{t-2}^1\}}$ für $t \geq 2$;
   iii) $\xi = (1_{\{S_t^1 > S_0^1\}})_{t=1,\dots,T}$;
   iv) $\xi_{t=1,\dots,T}$ mit $\xi_1 = 1$ und $\xi_t = 2\xi_{t-1} 1_{\{S_{t-1}^1 < 1\}}$ für $t \geq 2$;
   v) $\xi = (1_A 1_{\{t > n_0\}})_{t=1,\dots,T}$ mit $A \in \mathcal{F}_{n_0}$, $n_0 \in \{0, \dots, T\}$.

b) Sei nun $S^0 \equiv 1$. Zu jedem prävisiblen Prozess ξ gibt es bekanntlich genau eine selbstfinanzierende Stragie $\overline{\xi}$ mit $V_0 = 1$. Man interpretiere die risikolose Anlage S^0 als Bankkonto und die riskante Anlage S^1 als Aktie und beschreibe hiermit die Prozesse aus a) verbal.

Aufgabe 3: Für eine Strategie $\overline{\xi}$ kann man neben Gewinn- und Wertprozess auch noch den Kostenprozess

$$C_t = V_t - G_t, \qquad t = 0, \dots, T$$

betrachten.

a) Wie kann man den Prozess C interpretieren?

b) Man zeige, dass die Strategie $\overline{\xi}$ genau dann selbstfinanzierend ist, wenn $C_t = C_0$ für $t = 0, \dots, T$.

Aufgabe 4: Eine *Wahl-Option* (*chooser option*) gibt dem Käufer das Recht, zu einem vorher festgelegten Zeitpunkt $0 < t < T$ entweder eine Call- oder eine Put-Option mit Strikepreis K und Laufzeit T auf das selbe Wertpapier zu wählen. Dabei nehmen wir an, dass sich der Käufer für diejenige Option entscheidet, die zum Zeitpunkt t den größeren Wert hat.

a) Man gebe das Auszahlungsprofil der Wahl-Option an.

b) Man zeige, dass in einem arbitragefreien Marktmodell mit Numéraire $S^0 = (S_t^0)_{t=0,\dots,T}$, $S_t^0 = (1+r)^t$, in dem die Preise der Call- und Put-Optionen bekannt sind, für den Preis der Wahl-Option auf S^i

$$\pi(C^{Wahl}) = \pi(C^{call}) + \pi(C^{put})$$

gilt. Hierbei sei C^{call} eine Call-Option auf S^i mit Strikepreis K und Laufzeit T, C^{put} eine Put-Option auf S^i mit Strikepreis $K(1+r)^{t-T}$ und Laufzeit t.

Jede Aufgabe 6 Punkte. Zwei zufällig ausgewählte Aufgaben werden korrigiert und ihre Punktezahl verdoppelt.