Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel / Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik I

5.Blatt
Übung: 20.11.06
Abgabe: 29.11.06 (Mittwoch!)

Aufgabe 1: Es sei X_n ein Submartingal auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$. Weiterhin definieren wir

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} \left(E[X_k|\mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}\right), \quad A_0 = 0.$$

Man zeige: (A_n) ist eine prävisible, monoton wachsende Folge von Zufallsvariablen Die Zerlegung

$$X = M + A$$

von X in ein Martingal M und den prävisiblen, monoton wachsenden Proszess A ist P-fast sicher eindeutig.
Diese Zerlegung heißt die *Doob*-Zerlegung eines Submartingals.

Aufgabe 2: Es sei X_n eine einfache symmetrische Irrfahrt (d.h. $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ mit $P(Y_i = -1) = P(Y_i = +1) = 1/2$) und $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ eine *harmonische Funktion*, d.h.

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}:\, |y-x|=1} (f(y) - f(x)) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Man zeige, dass $(f(X_n))_n$ ein Martingal bezüglich der von X_n erzeugten Filtration $\mathcal{F}_n$ ist.

Aufgabe 3:.Wir betrachten das Folgende Dreiperiodenmodell: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_i\}$, $i = 1, \ldots, 8$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ und $P(\omega_i) > 0$ für alle i. Die Filtration $\mathcal{F}_n$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, \Omega\}, \\
\mathcal{F}_1 &= \sigma(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}), \\
\mathcal{F}_2 &= \sigma(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}), \\
\mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Es sei S^0 eine risikolose, Zinsfreie Anlage und S eine Aktie mit den Preisen $S_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 2$, $S_2(\omega_4) = 3$, $S_2(\omega_5, \omega_6) = 6$, $S_2(\omega_7, \omega_8) = 7$ und $S_3(\omega_1) = 1$, $S_3(\omega_2) = 2$, $S_3(\omega_3) = 3$, $S_3(\omega_4) = 3$, $S_3(\omega_5) = 5$, $_3(\omega_6) = 7$, $S_3(\omega_7) = 5$, $S_3(\omega_8) = 8$. Man bestimme alle äquivalenten Martingalmaße und berechne damit alle arbitragefreien Preise S_1 und S_0.

Aufgabe 4: Es seien Y_i, $i = 1, \dots, N$ unabhängige, zentrierte und identisch verteilte reelwertige Zufallsvariablen aus $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, die nicht konstant null sind. Weiterhin defininieren wir $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ und

$$\begin{aligned} X_0 &:= 0 \\ X_n &:= \sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

(i) Man zeige, dass (X_n) ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)$ ist.

(ii) Nun definieren wir die Filtration $\widetilde{\mathcal{F}}_n := \sigma(\mathcal{F}_n, X_N)$. Man zeige, dass X_n bezüglich $\widetilde{\mathcal{F}}_n$ kein Martingal ist, jedoch

$$\widetilde{X}_n := X_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{N-k}(X_N - X_k).$$

Hinweis: Die Erweiterung der Filtration um den Endwert X_N kann ökonomisch als *Insiderinformation* betrachtet werden, mathematisch handelt es sich um eine *Filtrationsvergrößerung.*

(iii) Mit der zusätzlichen Information über X_N sind nun prävisible Strategien ξ_n möglich, die einen positiven mittleren Gewinn liefern. Man bestimme eine $\widetilde{\mathcal{F}}_n$-prävisible Strategie (ξ_n) mit $|\xi_n| \leq 1$, die den erwarteten Gewinn $E[\sum_{i=0}^{N} \xi_i X_i]$ maximiert.