Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel / Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik I

3.Blatt
Übung: 06.11.06
Abgabe: 13.11.06

Aufgabe 1: Wir betrachten ein Finanzmarktmodell auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Gegeben seien ein Preissystem $(\pi^n)_n$, $n \in \mathbb{N}$, für einen unverzinsten, risikolosen Bond (d.h. $\pi^0 = 1$, $S^0 = 1$) und unendlich viele riskante Assets

$$S^n(\omega) = \omega 1_{\{1,\dots,n\}}(\omega).$$

Man gebe eine Bedingung für die Arbitragefreiheit des Preissystems $(\pi^n)_n$ an und zeige, dass unter dieser Bedingung dann für die Menge $\mathcal{P}$ der äquivalenten Martingalmaße $|\mathcal{P}| = 1$ gilt. Man gebe dieses eindeutige risikoneutrale Maß explizit an.

Aufgabe 2: Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum mit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelwertige Zufallsvariable.

a) Es sei $\mathcal{G}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Man gebe eine explizite Darstellung von

$$E[X \,|\, \mathcal{G}]$$

an.

b) Es seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$, durch eine geeignete Wahl von Ω, X, $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ zeige man, dass

$$E[E[X \,|\, \mathcal{H}] \,|\, \mathcal{I}] = E[E[X \,|\, \mathcal{I}] \,|\, \mathcal{H}]$$

im Allgemeinen *nicht* gilt.

Aufgabe 3:

i) Wir betrachten ein Marktmodell mit 3 riskanten Anlagen und 4 verschieden Zuständen (die alle mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen werden): $\overline{\pi} = (1, 4, 3)$, $\overline{S}(\omega_1) = (1, 2, 0)$, $\overline{S}(\omega_2) = (2, 8, 4)$, $\overline{S}(\omega_3) = (1, 5, 5)$ und , $\overline{S}(\omega_1) = (1/2, 2, 1)$. Man berechne die Menge der äquivalenten Martingalmaße zum Numéraire S^0.

ii) Wir fügen dem Markt eine vierte Anlage mit $\pi^3 = 4$, $S^3(\omega_1) = 4$, $S^3(\omega_2) = 4$, $S^3(\omega_3) = 4$ und $S^3(\omega_4) = 4$ hinzu. Ist der neu entstandene Markt arbitragefrei und vollständig? Ist S^3 durch die ersten drei Anlagen erreichbar?

iii) Wir ersetzen die in ii) hinzugefügte Anlage durch $\pi^3 = 5$, $S^3(\omega_1) = 10$, $S^3(\omega_2) = 4$, $S^3(\omega_3) = 4$ und $S^3(\omega_4) = 1$ und stellen uns die selben Fragen wie im obigen Teilbeispiel.

Aufgabe 4: Wir betrachten ein Marktmodell, dass aus einem risikolosen Bond mit Zissatz r und einer risikanten Anlage mit Preis π^1 zum Zeitpunkt 0 und

$$S^1(\omega) = e^{\sigma Z + m} \qquad \sigma > 0,\ m \in \mathbb{R},$$

zum Zeitpunkt 1 besteht, wobei Z eine standard-normalverteilte Zufallsvariable auf dem zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist. Man berechne alle risikoneutralen Maße in diesem Modell.
Anmerkung: S wird *log-normalverteilt* genannt.