Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel / Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik I

2.Blatt
Übung: 30.10.06
Abgabe: 06.11.06

Aufgabe 1: Wir betrachten ein Finanzmarktmodell auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ und $P(\omega_1) = 0,7$, $P(\omega_2) = 0,3$. Der Numéraire sei eine risikolose Anlage (also $r = 0$), die Entwicklung der Aktie mit Preis $\pi^1 = 100$ durch

$$S^1(\omega_i) = \begin{cases} 110 & \text{für } i = 1, \\ 70 & \text{für } i = 2, \end{cases}$$

gegeben. Nun sei C eine Europäische Call-Option auf S^1 mit Strikepreis 90, man berechne

a) eine replizierende Strategie für C,
b) alle arbitragefreien Preise für C und alle äquivalenten Martingalmaße.

Aufgabe 2: Es seien C_1 und C_2 zwei Europäische Call-Optionen mit Strikepreisen K_1 und K_2. Mit $\pi(C_1)$, $\pi(C_2)$ bezeichnen wir die Preise dieser Optionen in einem arbitragefreien, nicht-redundanten Marktmodell, in dem die in diesem Beispiel vorkommenden Optionen auch liquide gehandelt werden können. Man zeige mit Hilfe von *Arbitrageargumenten* (also ohne mit risikoneutralen Maßen zu argumentieren), dass für $K_1 \leq K_2$ folgende Ungleichungen gelten:

i) $\pi(C_1) \geq \pi(C_2)$,
ii) $\frac{K_2 - K_1}{1+r} \geq \pi(C_1) - \pi(C_2)$,
iii) $\lambda\pi(C_1) + (1-\lambda)\pi(C_2) \geq \pi(C_{\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2})$, $\lambda \in [0, 1]$, wobei $C_{\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2}$ eine Europäische Call-Option mit Strikepreis $\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2$ bezeichnet.

Aufgabe 3: Man beweise die folgende Darstellung der *Arbitragegrenzen* $\pi_{\inf}(C)$ und $\pi_{\sup}(C)$ eines *Contigent Claims* in einem arbitragefreien Martktmodell:

$$\begin{aligned} \pi_{\inf}(C) &= \sup\{\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} \,:\, \overline{\xi} \cdot \overline{S} \leq C \quad P\text{-f.s.}\}, \\ \pi_{\sup}(C) &= \inf\{\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} \,:\, \overline{\xi} \cdot \overline{S} \geq C \quad P\text{-f.s.}\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

a) Ein *strip* ist ein Contigent Claim mit Auszahlung

$$C = |V - K| + (K - V)^+,$$

wobei K der Strikepreis und $V = \overline{\xi} \cdot \overline{S}$ ein Portfolio aus mehreren riskanten Anlagen ist.

i) Man schreibe den *strip* als Kombination von Europäischen Put- und Call-Optionen.

ii) Man skizziere das Auszahlungsprofil des *strips*.

iii) Welche erwarteten Kursveränderungen spiegelt der Kauf eines *strips* wider?

b) Ein *strangle* setzt sich aus einer Europäischen Call-Option mit Strikepreis K_1 und einer Europäischen Put-Option mit Strikepreis K_2 zusammen (wobei man die Fälle $K_1 > K_2$, $K_1 = K_2$ und $K_1 < K_2$ unterscheide).

i) Man gebe die Auszahlungsfunktion des *strangles* an.

ii) Man skizziere das Auszahlungsprofil des *strangles*.

iii) Zur Absicherung gegen welche Kursrisiken kann ein *strangle* dienen?