Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel / Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik I

13. und letztes Blatt
Übung: 31.01.07
Abgabe: 05.02.07

Aufgabe 1: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), Q_1)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, σ, τ zwei Stoppzeiten und Y eine reellwertige Zufallsvariable. Man zeige:

i) Ist Y $\mathcal{F}_\tau$-messbar, so ist $Y 1_{\{\sigma \geq \tau\}}$bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ messbar;

ii) Ist $Y \geq 0$ nichtnegativ und $Q_2 \approx Q_1$, so gilt

$$E_{Q_1}[\, E_{Q_2}[\, Y \,|\, \mathcal{F}_\sigma \,] \,|\, \mathcal{F}_\tau \,] 1_{\{\tau \leq \sigma\}} + E_{Q_2}[\, Y \,|\, \mathcal{F}_\tau \,] 1_{\{\tau > \sigma\}} = E_{Q_1}[\, E_{Q_2}[\, Y \,|\, \mathcal{F}_{\sigma \vee \tau} \,] \,|\, \mathcal{F}_\tau \,];$$

iii) Auf $\{\sigma = \tau\}$ gilt

$$E_{Q_1}[\, Y \,|\, \mathcal{F}_\sigma \,] = E_{Q_1}[\, Y \,|\, \mathcal{F}_\tau \,].$$

Aufgabe 2: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = [0, 1]$, der Borel-σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ und dem Lebesgue-Maß P. Ferner definieren wir für $\lambda \in (0, 1)$ die (konvexe) Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$\mathcal{Q}_\lambda := \left\{ Q \approx P \,:\, \frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\lambda} \right\}.$$

Man wähle nun eine geeignete Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0,1,2\}}$ mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$ und zeige durch die Angabe eines geeigneten Paares Q_1, $Q_2 \in \mathcal{Q}_\lambda$ sowie einer Stoppzeit σ, dass $\mathcal{Q}_\lambda$ im Allgemeinen nicht stabil ist.
Hinweis: Am einfachsten wählt man $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ für eine geeignete Borel-Menge A und nimmt $Q_1 = P$.

Aufgabe 3: Es sei H eine diskontierte amerikanische Option mit Zeithorizont T und U die zugehörige Snell-Enveloppe. Weiterhin sei

$$\tau_{\min}^{(t)} = \inf\{n \geq t \,:\, U_n = H_n\}$$

die kleinste optimale Stoppzeit nach t. Man zeige die folgende (Rückwärts-)Rekursion für $\tau_{\min}^{(t)}$:

$$\tau_{\min}^{(t)} = t 1_{\{H_t \geq E[\, H_{\tau_{\min}^{(t+1)}} \,|\, \mathcal{F}_t \,]\}} + \tau_{\min}^{(t+1)} 1_{\{H_t < E[\, H_{\tau_{\min}^{(t+1)}} \,|\, \mathcal{F}_t \,]\}}.$$

Aufgabe 4: Wir betrachten eine nicht-erreichbare diskontierte amerikanische Option in einem unvollständigen Mehrperioden-Marktmodell, $\mathcal{P} = \{P^* : P^* \sim P, P^* \text{ risikoneutral}\}$ bezeichne die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Mit

$$U_t^{\uparrow} := \operatorname*{ess\,sup}_{P^* \in \mathcal{P}} U_t^{P^*} = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \operatorname*{ess\,sup}_{P^* \in \mathcal{P}} E^{P^*}[H_\tau \mid \mathcal{F}_t]$$

bezeichnen wir die obere Snell-Einhüllende von (H_t), ferner sei

$$\pi_{\sup}(H) := \sup_{P^* \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E^{P^*}[H_\tau].$$

Man zeige:

i) $(U_t^{\uparrow})$ ist das kleinste $\mathcal{P}$-Supermartingal, dass (H_t) dominiert;

ii) $\pi_{\sup}(H)$ ist der kleinste Betrag, mit dem man die Option zum Zeitpunkt 0 absichern kann (also der kleinste Betrag, mit dem ein Superhedging möglich ist);

iii) $\pi_{\sup}(H)$ ist kein arbitragefreier Preis für H.