Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel / Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik I

12.Blatt
Übung: 22.01.07
Abgabe: 29.01.07

Aufgabe 1: Wir betrachten ein vollständiges Binomialmodell (CRR-Modell) mit einer riskanten Anlage S_t und einem risikolosen Bond $S_t^0 = (1+r)^t$, $r > 0$. (Die Beschreibung der Auf- und Abstiege erfolgt wieder via b und a, das äquivalente Martingalmaß ist durch $P^* = (p^*, 1-p^*)$ gegeben.) In diesem Modell ist eine amerikanische Option mit Zeithorizont T durch den diskontierten Payoff

$$H_t = h_t(S_t) \qquad h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } t \in \{0, \dots T\}$$

gegeben.

i) Man zeige, dass die Snell-Einhüllende $U^{P^*} = (U_t^{P^*})_{t \in \{0,\dots T\}}$ von H die Gestalt

$$U_t^{P^*} = u_t(S_t) \qquad t \in \{0, \dots T\}$$

hat, wobei u durch

$$\begin{aligned} u_T &\equiv h_T \\ u_t(y) &= h_t(y) \vee (u_{t+1}(y(1+b)p^* + u_{t+1}(y(1+a))(1-p^*)) \qquad t \in \{0, \dots, T-1\} \end{aligned}$$

gegeben ist.

ii) Die kleinste maximierende Stoppzeit ist also durch

$$\tau_{\min}(\omega) = \min \{t \in \{0, \dots, T\} : u_t(S_t(\omega)) = h_t(S_t(\omega))\}$$

gegeben. Zerlegen wir $\{0, \dots, T\} \times [0, \infty)$ nun in den *Fortsetzungsbereich* (*continuation region*) $\mathcal{R}_C$ und den *Stoppbereich* (*stopping region*) $\mathcal{R}_S$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_C &= \{(t, y) \in \{0, \dots, T\} \times [0, \infty) : u_t(y) > h_t(y)\}, \\ \mathcal{R}_S &= \{(t, y) \in \{0, \dots, T\} \times [0, \infty) : u_t(y) = h_t(y)\}, \end{aligned}$$

so können wir $\tau_{\min}$ darstellen als

$$\begin{aligned} \tau_{\min}(\omega) &= \min \{t \in \{0, \dots, T\} : (t, S_t(\omega)) \notin \mathcal{R}_C\} \\ &= \min \{t \in \{0, \dots, T\} : (t, S_t(\omega)) \in \mathcal{R}_S\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Wir betrchten wiederum das CRR-Modell, wobei wir $\Lambda_t := \prod_{k=1}^t (1 + R_k)$, $R_k \in \{a, b\}$ definieren. $\mathcal{T} := \{\tau : \tau \text{ ist Stoppzeit und } \tau \leq T\}$ sei die Menge aller durch T beschränkter Stoppzeiten. Ferner definieren wir die Funktion π durch

$$\pi : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_{P^*} \left[\frac{(K - y\Lambda_T)^+}{(1+r)^\tau} \right].$$

i) Man zeige, dass π konvex, monoton fallend und daher auch stetig ist.

ii) Man zeige, dass es einen Wert $x^* \in [\frac{K}{(1+b)^T}, K)$ gibt, so dass

$$\pi(S_0) \begin{cases} = (K - S_0)^+ & \text{für } S_0 \leq x^*, \\ > (K - S_0)^+ & \text{für } x^* < S_0 < \frac{K}{(1+a)^T}, \\ = 0 & \text{für } S_0 \geq \frac{K}{(1+a)^T}. \end{cases}$$

iii) Man zeige, dass in diesem Fall $\tau \equiv T$ nun nicht optimal sein muss, obwohl

$$S^0_{t+1} = (1+r)^{t+1} \geq (1+r)^t = S^0_t \quad \text{für } t \in \{0, \dots, T-1\}$$

weiterhin gilt. Das heißt, die Überlegungen für die Call-Option aus der Vorlesung greifen im Fall der diskontierten amerikanischen Put-Option nicht mehr.

Aufgabe 3: Wir betrachten das folgende 2-Perioden Marktmodell: Es sei $S^0_t \equiv 1$ und $S_0 \equiv 3$, $S_1(\omega_1, \omega_2) = 2$, $S_1(\omega_3, \omega_4, \omega_5) = 4$, $S_2(\omega_1) = 1$, $S_2(\omega_2) = 3$, $S_2(\omega_3) = 2$, $S_2(\omega_4) = 3$, $S_2(\omega_5) = 5$. Das Marktmaß ist gegeben durch $P(\omega_i) = 1/5$, $i \in \{1, \dots, 5\}$. In diesem Modell betrachten wir die diskontierte amerikanische Call-Option $H_t = (S_t - 3)^+$.

i) Man zeige, dass $P^* = (p^*_1, p^*_2, p^*_3, p^*_4, p^*_5) = (1/4, 1/4, 1/10, 1/10, 3/10)$ ein äquivalentes Martingalmaß ist und berechne die diesbezügliche Snell-Einhüllende $U^{P^*}_t$.

ii) Man berechne die minimale und maximale optimierende Stoppzeit für den Käufer.

iii) Man zeige, dass $U^{P^*}_t$ für $t < 2$ *nicht* das minimale Investitionskapital für den Käufer ist, um die Option von t bis 2 abzusichern. Man begründe, warum dies nicht den in der Vorlesung gezeigten Resultaten widerspricht.

Jede Aufgabe 8 Punkte. Zwei zufällig ausgewählte Aufgaben werden korrigiert und die erreichte Punktezahl mit 1,5 multipliziert.