Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel / Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik I

11.Blatt
Übung: 15.01.07
Abgabe: 22.01.07

Aufgabe 1:

a) Es seien X und Y m-dimensionale Zufallsvektoren definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei X beschränkt ist (bezüglich einer beliegbigen Norm auf $\mathbb{R}^m$) und Y P-integrierbar mit $E_P[Y] = 0$. Sei außerdem $\mathcal{F}_0$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Folgt aus X $\mathcal{F}_0$-messbar auch $E_P[X \cdot Y] = 0$?

b) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,\ldots T\}}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und (Y_t) ein $(\mathcal{F}_t)$-Supermartingal. Man zeige, dass wenn $E_P[Y_T] = Y_0$ gilt, Y sogar ein Martingal (bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)$ und dem Maß P) ist.

Aufgabe 2: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,\ldots T\}}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, (Y_t) ein stochastischer Prozess mit $Y_t \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ für alle $t \in \{0, \ldots, T\}$ und τ eine $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit. Man zeige, dass wenn Y die Doob-Zerlegung $Y_t = M_t - A_t$ besitzt, die Doob-Zerlegung von Y^τ durch $Y_t^\tau = M_t^\tau - A_t^\tau$ gegeben ist.

Aufgabe 3: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,\ldots T\}}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, (Y_t) ein stochastischer Prozess mit $Y_t \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ für alle $t \in \{0, \ldots, T\}$ und U die Snell-Einhüllende von Y mit Doob-Zerlegung $U_t = M_t - A_t$. Ferner betrachten wir die zufälligen Zeiten

$$\begin{aligned}
\tau_{\min} &: \Omega \to \{0, \ldots, T\}, \quad \omega \mapsto \min\{t \in \{0, \ldots, T\} : U_t(\omega) = Y_t(\omega)\}; \\
\tau_{\max} &: \Omega \to \{0, \ldots, T\}, \quad \omega \mapsto \inf\{t \in \{0, \ldots, T\} : E_P[U_{t+1} - U_t|\mathcal{F}_t](\omega) \neq 0\} \wedge T.
\end{aligned}$$

Hierbei beachte man, dass $\inf \emptyset := \infty$. Dies ist die kleinste (respektive größte) Stoppzeit, die den Erwartungswert von Y_t unter P maximiert. Man zeige:

i) $\tau_{\min}$ und $\tau_{\max}$ sind Stoppzeiten;

ii) $\tau_{\max} = \inf\{t \in \{0, \ldots, T-1\} : A_{t+1} \neq 0\} \wedge T$ P-fast sicher;

iii) für jede $\{0, \ldots, T\}$-wertige Stoppzeit gilt $A_t^\tau = 0$ P-fast sicher genau dann, wenn $\tau \leq \tau_{\max}$.

Aufgabe 4: Wir betrachten das folgende Würfelspiel. Ein/e Spieler/in darf maximal N mal würfeln und gewinnt mit jedem Wurf, der keine Fünf liefert, genau so viele Euro zu seinem/ihrem Vermögen (Anfangsvermögen 0) hinzu, wie viele Augen der Würfel zeigt. Würfelt er/sie jedoch eine Fünf, verliert er/sie das ganze Vermögen und muss das Spiel aufgeben. Man berechne die minimale und maximale Stoppstrategie, die den erwarteten Gewinn maximiert.

Jede Aufgabe 6 Punkte. Zwei zufällig ausgewählte Aufgaben werden korrigiert und die erreichte Punktezahl verdoppelt.