Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel / Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik I

10.Blatt
Übung: 08.01.07
Abgabe: 15.01.07

Aufgabe 1: Es sei $S_t := S_0 \exp\left(\sigma B_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right)$ eine geometrische Brownsche Bewegung und $X_t := e^{-rt} S_t$. Mit Hilfe der zeitabhängigen Itô-Formel leite man die folgenden stochastischen Differentialgleichungen her:

$$\begin{aligned} dS_t &= \sigma S_t \, dB_t + r S_t \, dt; \\ dX_t &= \sigma X_t \, dB_t. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Es sei $S_t := S_0 \exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$ eine geometrische Brownsche Bewegung und v der zugehörige Black-Scholes-Preis einer europäischen Call-Option wobei $r \equiv 0$ gilt. Mit Hilfe der Black-Scholes-Gleichung und der zeitabhängigen Itô-Formel zeige man, dass

$$v(T-t, S_t) = v(T, S_0) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(T-u, S_u) \, dS_u$$

gilt.

Aufgabe 3: Es sei (B_t) eine Brownsche Bewegung. Man zeige:

i) $(\hat{B}_t)$ mit $\hat{B}_t := \alpha B_{t/\alpha^2}$ ist für $\alpha \neq 0$ wiederum eine Brownsche Bewegung.
ii) $(B_t^2 - t)$ ist ein Martingal bezüglich der von (B_t) erzeugten Filtration $(\mathcal{F}_t^B)$.

Aufgabe 4: Wir betrachten das *Bachelier*-Modell eine Finanzmarktes, das heißt, der Aktienkurs S_t ist durch

$$S_t := S_0 + S_0 \sigma B_t$$

gegeben. Man berechne den Preis einer europäischen Call-Option mit Maturität T und Strikepreis K zum Zeitpunkt $t = 0$ und vergleiche ihn mit dem entsprechenden Preis im Black-Scholes-Modell.

Jede Aufgabe 6 Punkte. Zwei zufällig ausgewählte Aufgaben werden korrigiert und die erreichte Punktezahl verdoppelt.