Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel / Prof. Dr. Alexander Schied
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Florence Siwak, MA 7-4

Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik I

1.Blatt
Übung: 23.10.06
Abgabe: 30.10.06

Aufgabe 1: Es sie $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum mit endlich erzeugter σ-Algebra $\mathcal{F}$. P und P^* seinen zwei Wahrscheinlichkitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

a) Unter welchen Bedingungen existiert die Radon-Nikodym-Dichte $\frac{dP}{dP^*}$?

b) Man gebe eine explizite Darstellung von $\frac{dP}{dP^*}$ an.

Aufgabe 2: Wir betrachten ein Marktmodell mit einer risikolosen Anlage und zwei Aktien. Die risikolose Anlage habe einen Zinssatz $r = 0,2$ und der Preisvektor sei $\pi = (2, 4)$. Für die Mögliche Kursentwicklung der Aktien gilt $S(\omega_1) = (2, 4)$ und $S(\omega_2) = (4, 5)$, wobei beide Szenarien mit derselben Wahrscheinlichkeit eintreten. Man beweise, dass das Modell eine Arbitragegelegenheit beinhaltet, indem man eine entsprechende Handelsstrategie $\overline{\xi}$ angibt, die zu Arbitrage führt. Weiterhin berechne man einen alternativen Preisvektor $\widetilde{\pi}$, so dass der Markt arbitragefrei ist.

Aufgabe 3: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $P[\omega_i] > 0$ für $i = 1, 2, 3$. In unserem Einperiodenmodell mit einer Aktie sei $\pi_0 = 1$, $S^0 = 1 + r$, $\pi^1 = 3$ und

$$S^1(\omega_i) = \begin{cases} 2 & \text{für } i = 1, \\ 3 & \text{für } i = 2, \\ 5 & \text{für } i = 3 \end{cases}$$

a) Man charakterisiere diejenige Zinsraten $r > -1$, für die das Modell arbitragefrei ist.

b) Für alle anderen r gebe man eine Strategie $\overline{\xi}$ an, die zu Arbitrage führt.

Aufgabe 4:

a) Man beweise die folgende Variante des Theorems von der seperierenden Hyperebene: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Teilmenge, so dass $x \cap \overline{\mathcal{C}} = \emptyset$. Dann gibt es eine Hyperebene $H = \{z \in \mathbb{R}^n : z \cdot y = d;\ y \in \mathbb{R}^n,\ d \in \mathbb{R}\}$, die x von $\mathcal{C}$ strikt trennt, das heißt $H \cap x = H \cap \mathcal{C} = \emptyset$ und $H \cap g \neq \emptyset$ für alle Verbindungsstrecken $g = \{z \in \mathbb{R} : z = \lambda x + (1 - \lambda)y;\ y \in \mathcal{C},\ \lambda \in [0, 1]\}$.

b) Man zeige, dass es im Allgemeinen keine seperierende Hyperebene für zwei nichtleere konvexe Mengen $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ gibt, die $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ strikt trennt.

Jede Aufgabe 6 Punkte