

Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page



Page 1 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Starrheit and globale Starrheit

Bill Jackson

Brigitte Servatius

Herman Servatius

Worcester Polytechnic Institute



1. Einleitung

Generische Starrheit in der Ebene ist eine Eigenschaft des zu Grunde liegenden Graphen:

Satz 1 (Laman - 1970)[7]

Ein Graph G ist in der Ebene genau dann generisch starr wenn eine Teilmenge E der Kantenmenge existiert so dass

$$|E| = 2|V(E)| - 3$$

und für jede Teilmenge $F \subseteq E$,

$$|F| \leq 2|V(F)| - 3.$$

Teilmengen E der Kantenmenge mit

$$|F| \leq 2|V(F)| - 3$$

*für jedes $F \subseteq E$ heissen **unabhängig**. Dadurch wird ein Matroid, $\mathcal{M}(G)$, auf der Kantenmenge definiert.*

Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

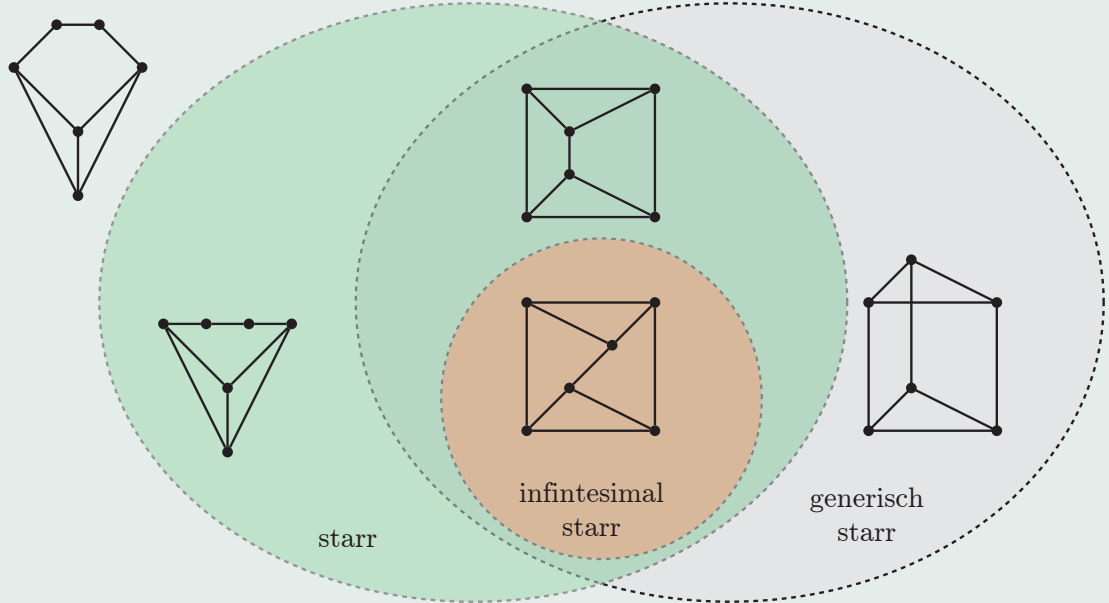
Page 3 of 93

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



Starrheit und Variationen



- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

Navigation buttons: double left arrow, double right arrow

Navigation buttons: single left arrow, single right arrow

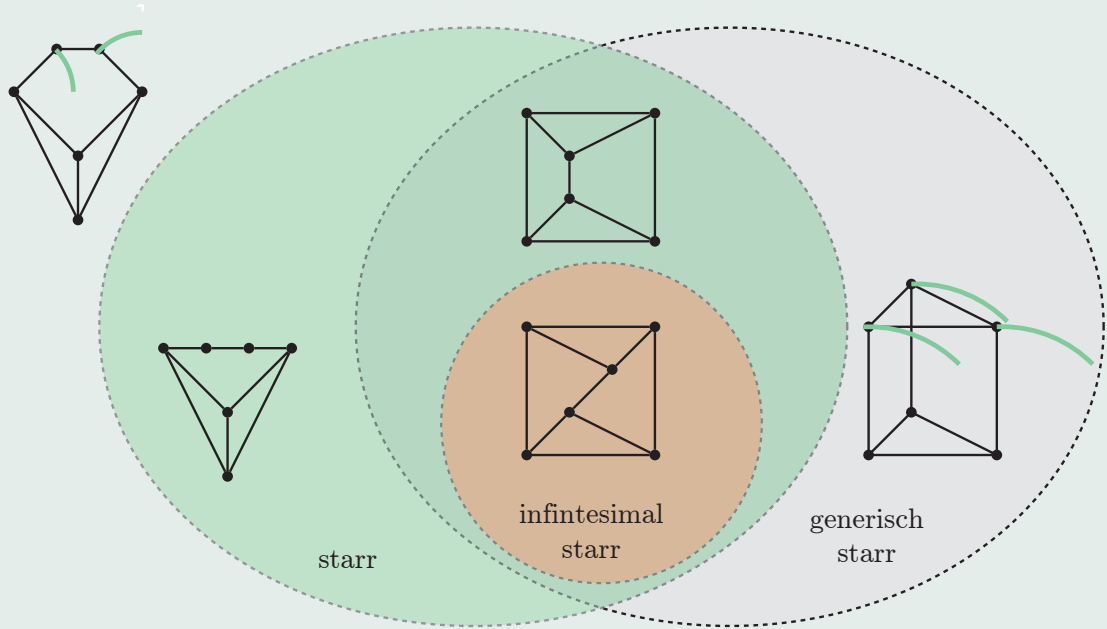
Page 4 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Starrheit
Nicht-starr (wackelig)



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

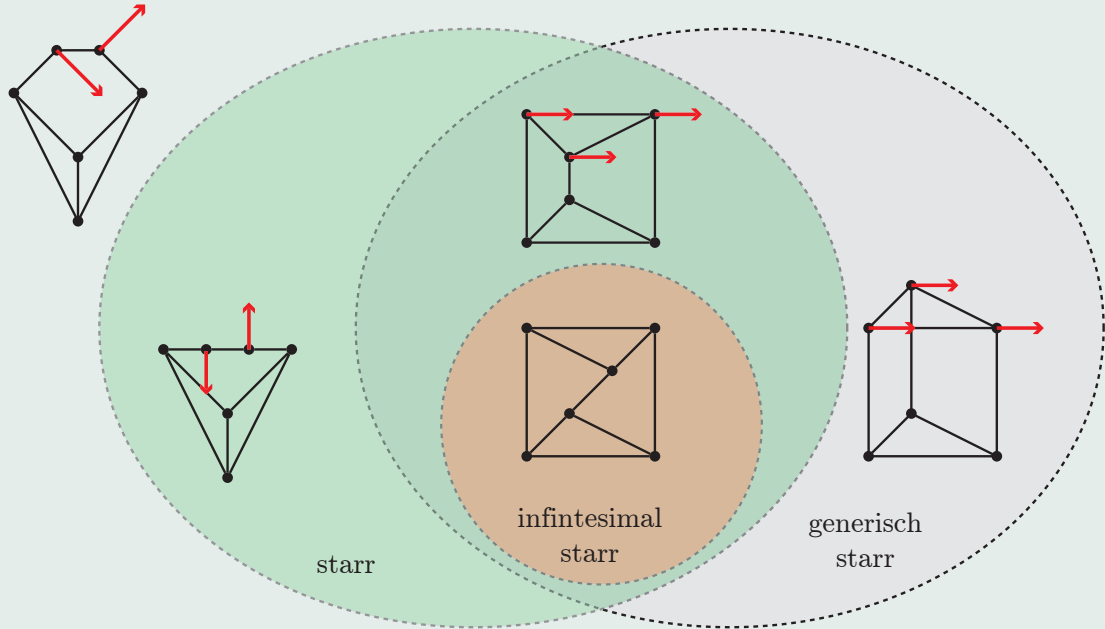
Page 5 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Infinitesimal nicht starre Graphen haben
potentielle Anfangsgeschwindigkeiten.



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

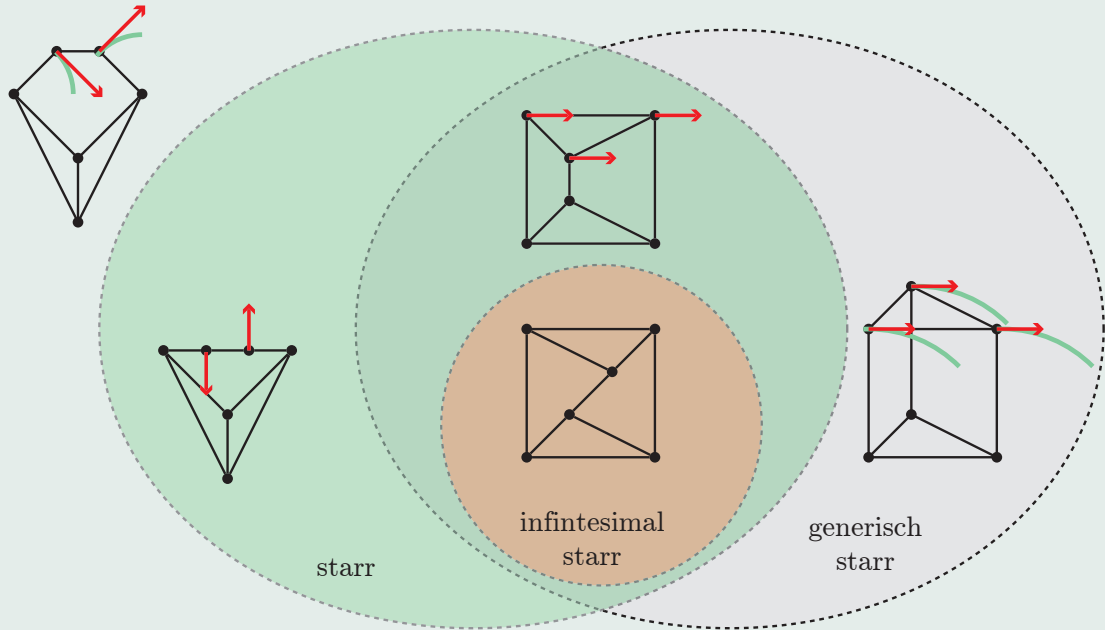
Page 6 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Generische Starrheit ist eine Eigenschaft des Graphen
nicht der Einbettung.



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2. Arten der Starrheit

Ein *Fachwerk* (im m -dimensionalen Raum) ist ein Tripel $(V, E, \overrightarrow{p})$; (V, E) ist ein Graph und $\overrightarrow{p}$ ist eine Einbettung von V in den reellen m -dimensionalen Raum.

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach...](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 8 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Ein Fachwerk ist *global starr* (in $\mathbb{R}^m$) wenn alle Lösungen des Systemes quadratischer Gleichungen, welches für jede Kante eine Gleichung enthält, die die Kantenlänge bestimmt, kongruenten Fachwerken entsprechen. Ein Fachwerk ist *starr* (in $\mathbb{R}^m$) wenn alle Lösungen dieses Gleichungssytemes in der Umgebung einer Lösung (als Punkt im $\mathbb{R}^{mn}$) kongruenten Fachwerken entsprechen.

DON'T CLICK HERE!



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Ein Fachwerk $(V, E, \overrightarrow{p})$ heisst *generisch* wenn alle Fachwerke in einer Umgebung von $P = \overrightarrow{p}(V)$ in $\mathbb{R}^{nm}$ dieselben Starrheitseigenschaften besitzen wie $(V, E, \overrightarrow{p})$. Eine Punktmenge P in $\mathbb{R}^m$ heisst *generisch* wenn jedes Fachwerk $(V, E, \overrightarrow{p})$ mit $\overrightarrow{p}(V) = P$ generisch ist.



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Ist $G(V, E)$ nicht starr, so nennen wir die maximalen starren Untergraphen *starre Komponenten*. Zugehörigkeit zu starren Komponenten ist eine Äquivalenzrelation auf der Kantenmenge.

Das Kriterium von Laman 1 charakterisiert generische Starrheit durch Beschreibung der unabhängigen Kantenmengen in $\mathcal{M}$. In dem folgenden Satz wird dasselbe durch Beschreibung der Rangfunktion von $\mathcal{M}$ erreicht.



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Satz 2 [9] Sei $G = (V, E)$ ein Graph. G ist dann und nur dann starr wenn für alle Familien induzierter Untergraphen $\{G_i = (V_i, E_i)\}_{i=1}^m$ mit $E = \cup_{i=1}^m E_i$ auch $\sum_{i=1}^m (2|V_i| - 3) \geq 2|V| - 3$ gilt.

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach...](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 12 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Ein Graph $G(V, E)$ heisst *starr im Überfluss* wenn, für alle $e \in E$ der Graph $G(V, E - e)$ starr ist, d.h. jede einzelne Kante kann entfernt werden ohne die Starrheit des Graphen zu zerstören. Starrheit im Überfluss ist ein Schlüsselkonzept zur Beschreibung der globalen Starrheit.

Satz 3 [5] *Ein Graph G ist genau dann global starr, wenn G sowohl dreifach zusammenhängend als auch starr im Überfluss ist (ausgenommen G ist K_3).*



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

3. Knotentransitive Graphen

Satz 4 *Ein 4-regulärer knotentransitiver Graph ist in der Ebene dann und nur dann generisch starr wenn er keinen Untergraphen isomorph mit K_4 enthält oder einer der Graphen in der folgenden Abbildung ist.*



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 14 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

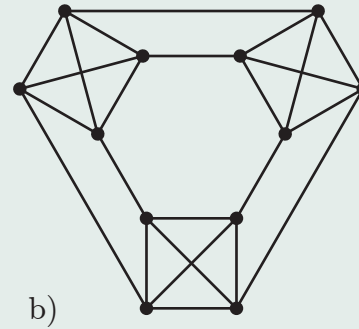
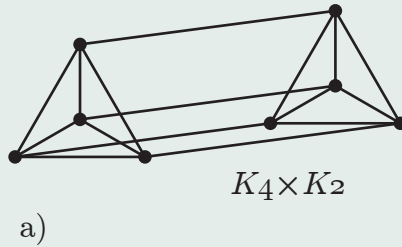


Abb. 1 Knotentransitive starre Graphen die K_4 enthalten.

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach...](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 15 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Sei G ein knotentransitiver 4-regulärer Graph mit n Knoten. Da G $2n$ Kanten hat, kann das Starrheitsmatroid nicht frei sein. Wenn G nicht starr ist, kann G nicht K_5 sein. Sei v ein Knoten von G . Kanten, die mit v inzident sind müssen zu mindestens zwei verschiedenen starren Komponenten gehören. Gehören sie alle vier verschiedenen starren Komponenten zu, so müssen alle starren Komponenten aus Einzelkanten bestehen, und $\mathcal{M}(G)$ muss, im Widerspruch zum Kriterium von Laman 1, frei sein. Gehören die Kanten inzident mit v zwei gleichen starren Komponenten zu, so müssen diese Komponenten Dreiecke sein, welches zum selben Widerspruch führt wie vorher. Entspricht eine dieser Kanten einer starren Komponente und gehören die drei anderen Kanten einer zweiten starren mit v inzidenten Komponente zu, so muss diese Komponente K_4 sein, denn $K_{3,3}$ und das Dreieckprisma kommen, aus dem selben Grund wie früher, nicht in Frage.

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach...](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 16 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Ist umgekehrt G ein generisch 4-regulärer starrer Graph, dann kann $\mathcal{M}(G)$ höchstens drei von einander unabhängige Kreise besitzen. Die Anzahl der mit einem Knoten v inzidenten K_4 ist für jedes v gleich. Sind es vier, so gilt $G = K_5$. Genau zwei, bzw. genau drei K_4 inzident mit jedem v ist unmöglich. Ist jedes v nur mit einem K_4 inzident, enthält G entweder zwei oder drei K_4 und ist daher mit einem der Graphen in Abbildung 1 isomorph.

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach . . .](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 17 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Lemma 1 *Sind S_1 und S_2 nichttriviale starre Komponenten eines knotentransitiven wackeligen Graphen G , so existiert ein Automorphismus α von G mit $\alpha(S_1) = S_2$.*

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach...](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 18 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

BEWEIS: Jeder Automorphismus von G bildet starre Komponenten auf starre Komponenten ab. Ist G wackelig und knotentransitiv, so muss jeder Knoten v von G mit mindestens zwei verschiedenen starren Komponenten inzident sein. Jedes v kann nur mit einer nichttrivialen Komponente inzident sein, denn jede Basis einer Komponente hat Minimalgrad 2 und die Vereinigung dieser Basen bildet eine Basis von $\mathcal{M}(G)$ und muss daher einen Knoten von Grad 3 oder weniger besitzen. Wenn durch jeden Knoten eine nichttriviale Komponente mit Einzelkantenkomponenten verbunden ist, muss die Zahl der Einzelkomponenten genau 1 sein. Ist G unabhängig, kann der Grad von G höchstens 3 sein. $\square$

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach . . .](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 19 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Satz 5 Sei G ein knotentransitiver wackeliger Graph. Dann ist G k -regulär mit $k \leq 6$ und die Kontraktion der nichttrivialen starren Komponenten führt zu einem k -regulären Graphen mit $k \leq 5$.

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach...](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 20 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

BEWEIS: Nach dem vorhergehenden Lemma hat G genau eine Art nichttrivialer Komponenten der Ordnung s . Eine solche Komponente ist durch s unabhängige Kanten mit ihrem Komplement in G verbunden. Kontraktion der Komponenten erzeugt daher einen s -regulären Graphen der Ordnung v (und $sv/2$ Kanten) wobei v die Anzahl der nichttrivialen starren Komponenten von G ist. Der Rang von G ist $v(2s - 3) + sv/2$ und muss kleiner als $2sv - 3$ sein. Es folgt $6 < v(6 - s)$, daher haben die starren Komponenten höchstens 5 Knoten und $k \leq 6$.

□

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach...](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 21 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Satz 6 Sei G ein zusammenhängender, k -regulärer, knotentransitiver Graph der Ordnung n . G ist dann und nur dann wackelig, wenn

(a) $k = 2$ und $n \geq 4$.

(b) $k = 3$ und $n \geq 8$.

(c) $k = 4$ und G besitzt einen aus s disjunkten K_4 bestehenden Faktor mit $s \geq 4$

(d) $k = 5$ und G besitzt einen aus s disjunkten K_4 bestehenden Faktor mit $t \geq 8$.

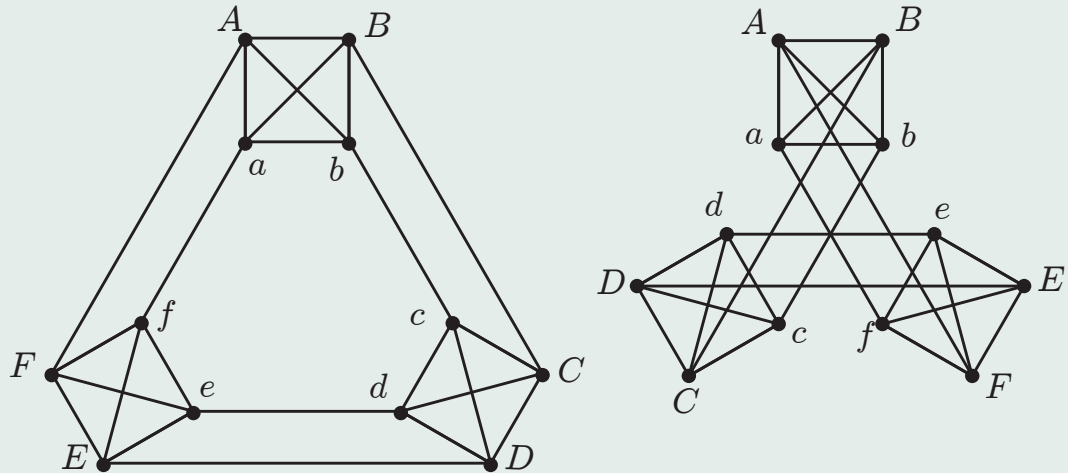


Abb. 2 Zwei Einbettungen, beide starr, aber weder infinitesimal noch global starr.

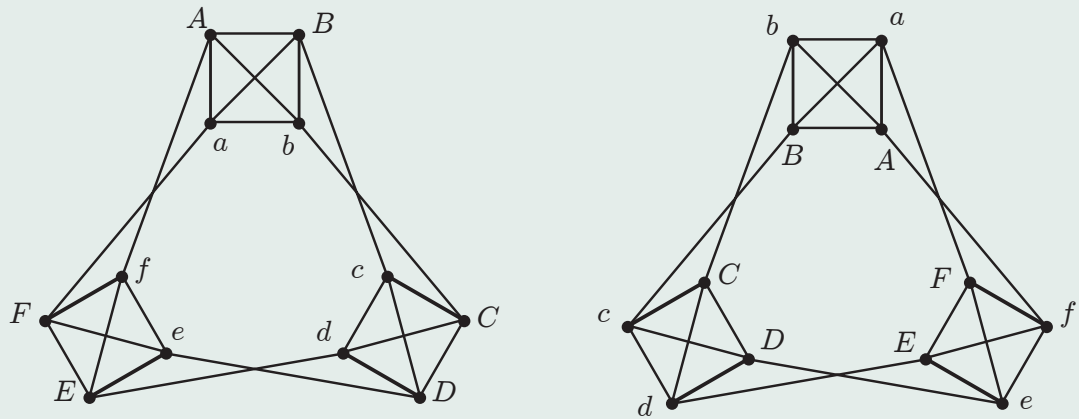


Abb. 3 Zwei Eibettungen, infinitesimal aber nicht global starr.



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 24 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

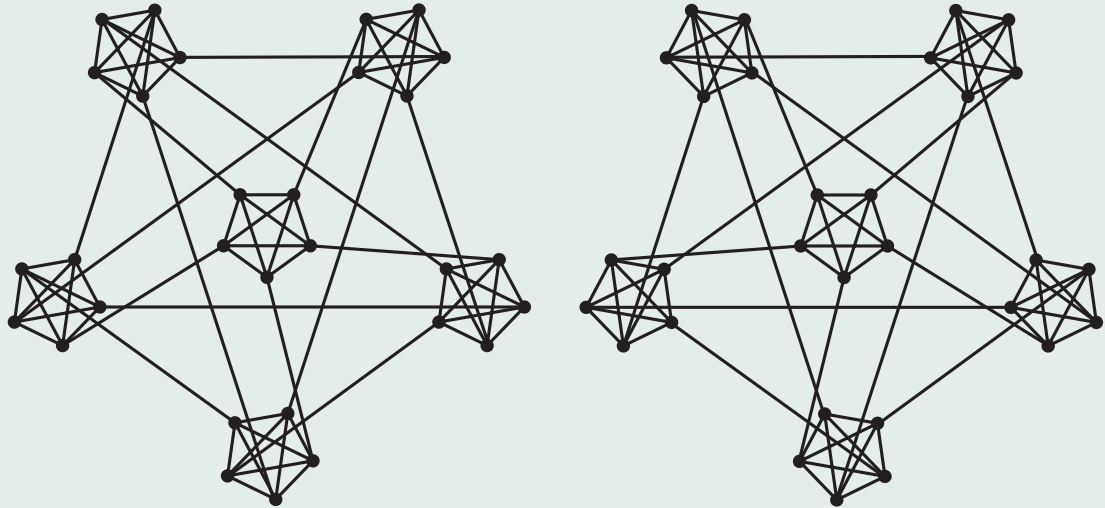


Abb. 4 *Zwei starre, aber nicht global starre Einbettungen.*

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach...](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 25 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Wenn G nur starr, aber nicht im Überfluss starr ist, so ist $\mathcal{M}(G)$ nicht zusammenhängend, sondern kann als direkte Summe der Matroide zu den maximalen im Überfluss starren Untergraphen geschrieben werden. In den obigen Beweisen können wir im Überfluss starre Komponenten statt der starren Komponenten verwenden und erhalten dadurch folgenden Satz.



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀◀

▶▶

◀

▶

Page 26 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Satz 7 *Ein knotentransitiver Graph ist global starr, ausser er besitzt einen aus drei K_4 oder sechs K_5 bestehenden Faktor.*



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 27 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

BEWEIS: Für starre, aber nicht global starre Graphen erhalten wir statt der letzten Ungleichung im Beweis des Satzes 5 eine Gleichung deren Lösungen die beiden Ausnahmen liefern. $\square$



4. Beispiel

Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀◀

▶▶

◀

▶

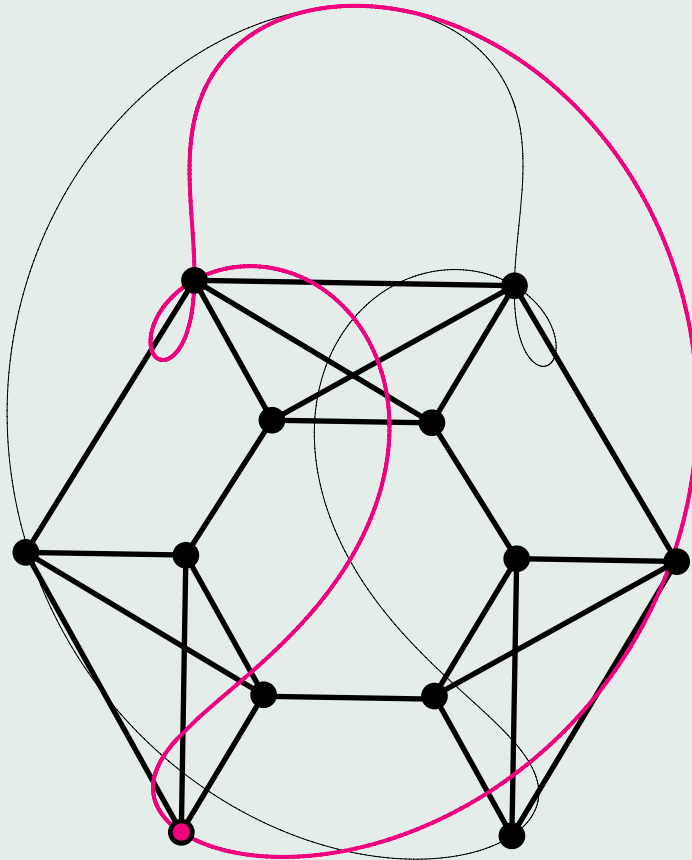
Page 28 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page



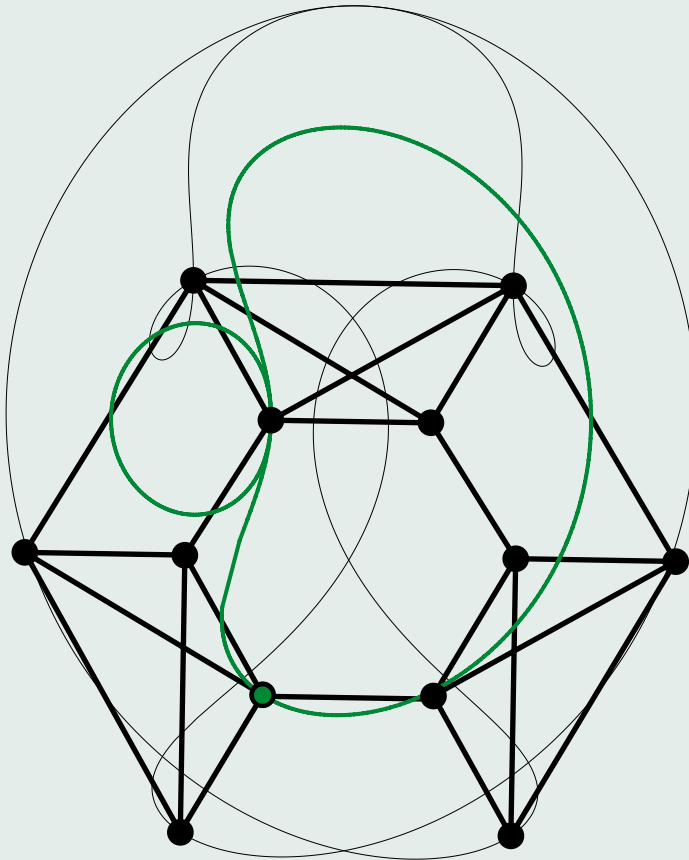
Page 29 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

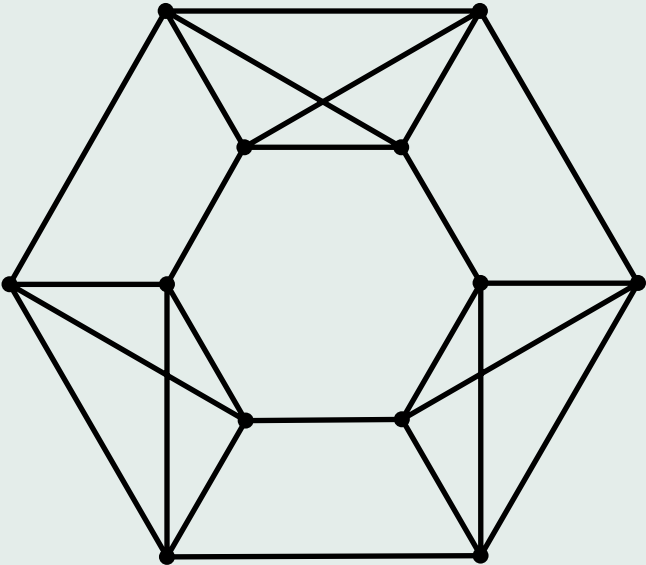
Page 30 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

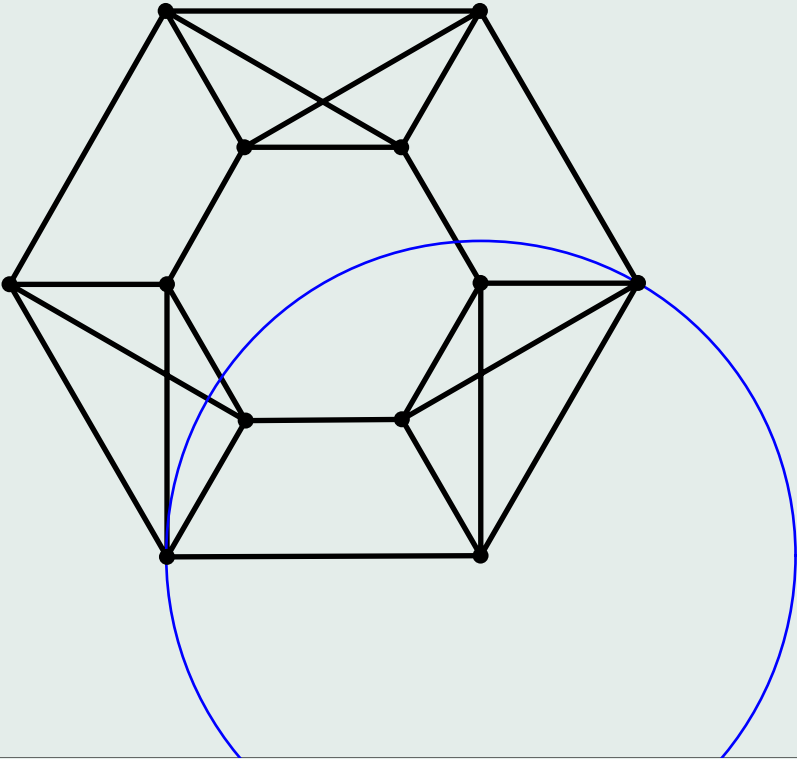
Page 31 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page



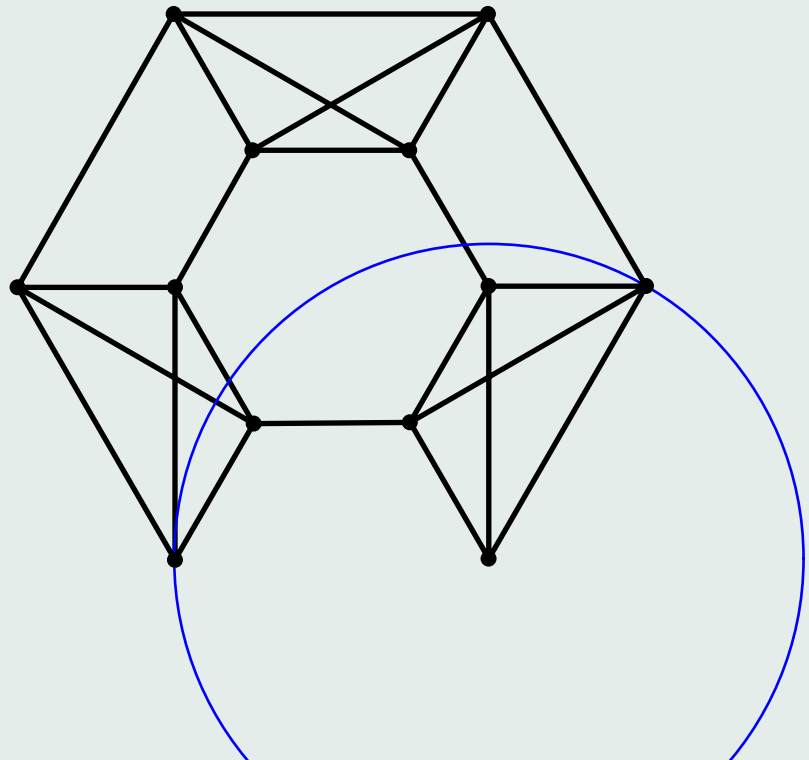
Page 32 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page



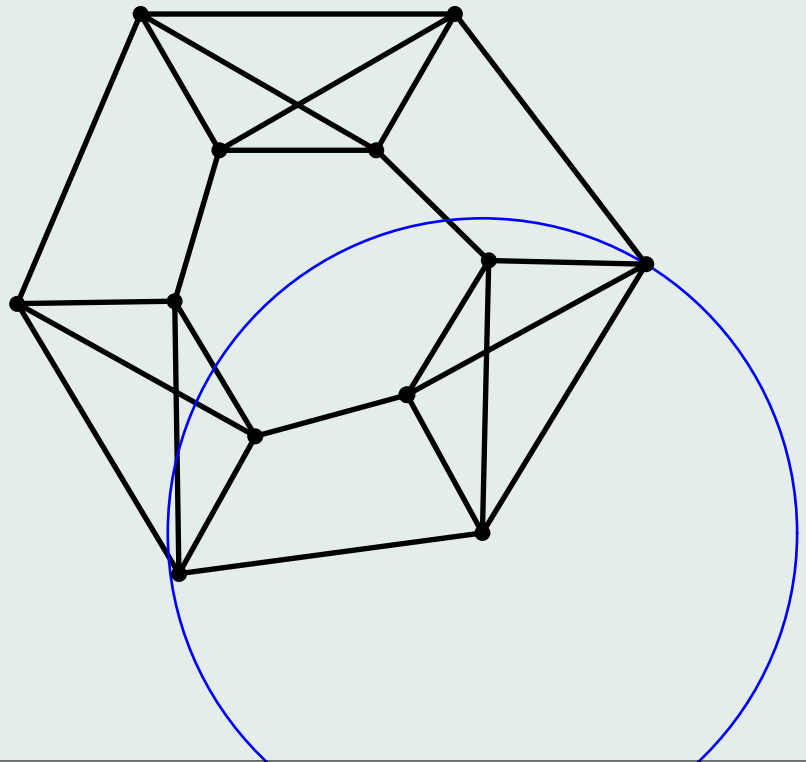
Page 33 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page



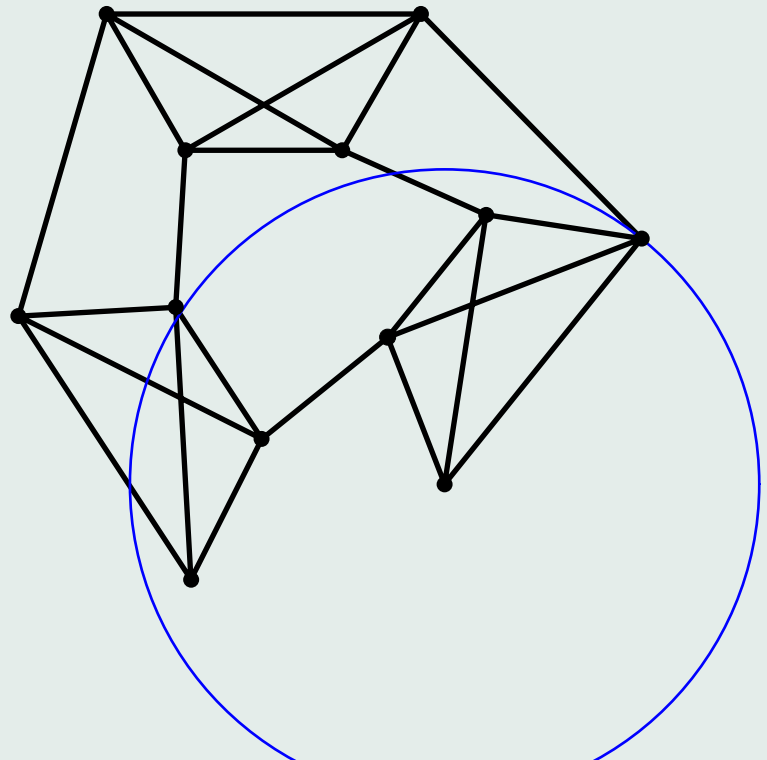
Page 34 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀

▶▶

◀

▶

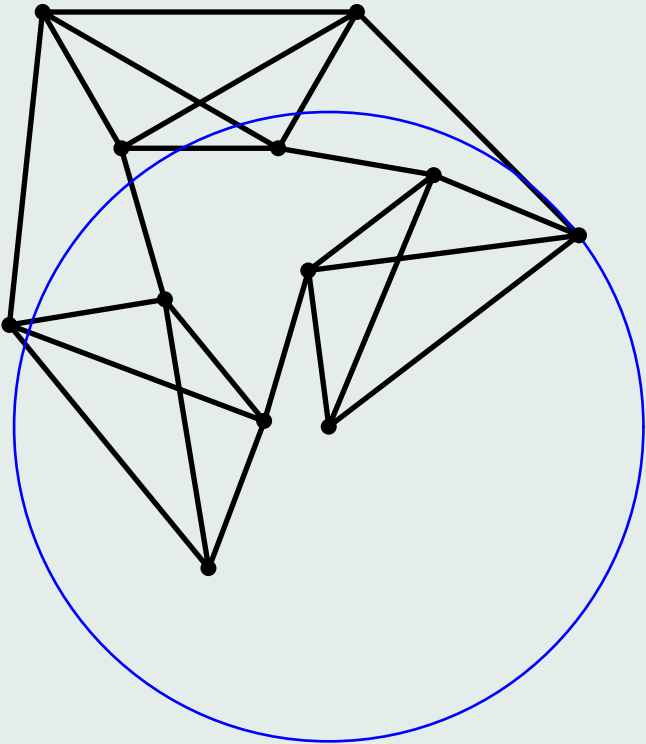
Page 35 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page



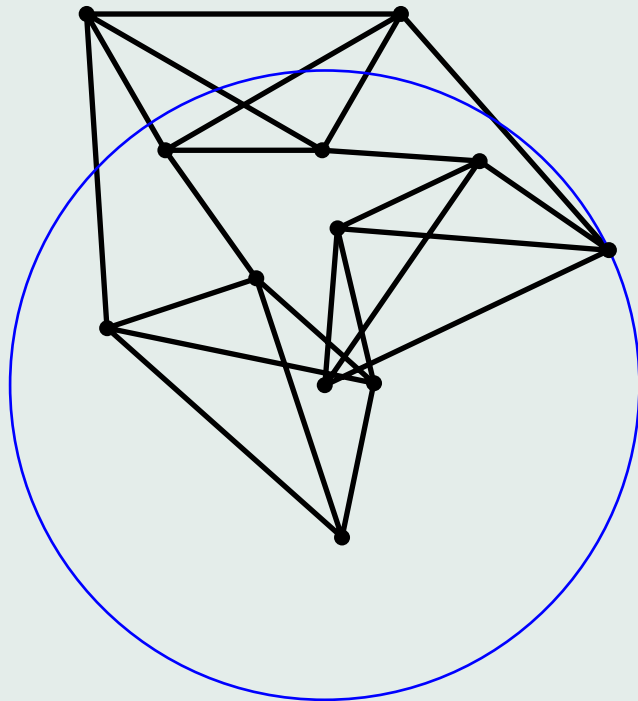
Page 36 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page



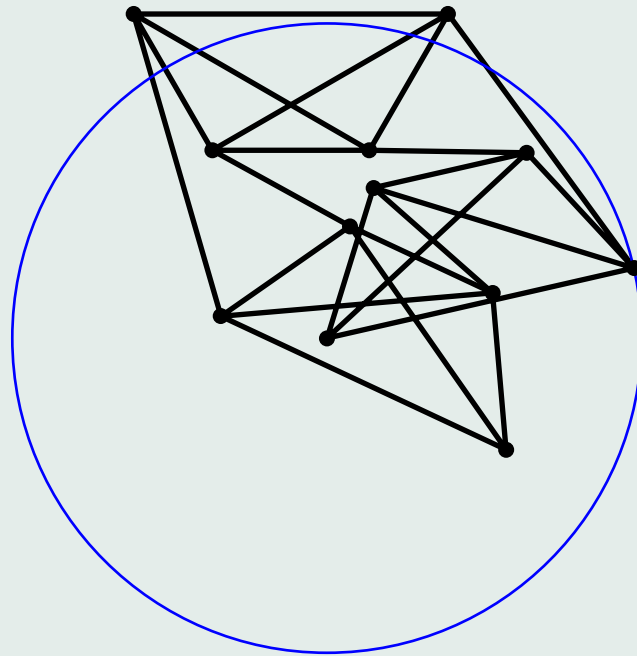
Page 37 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

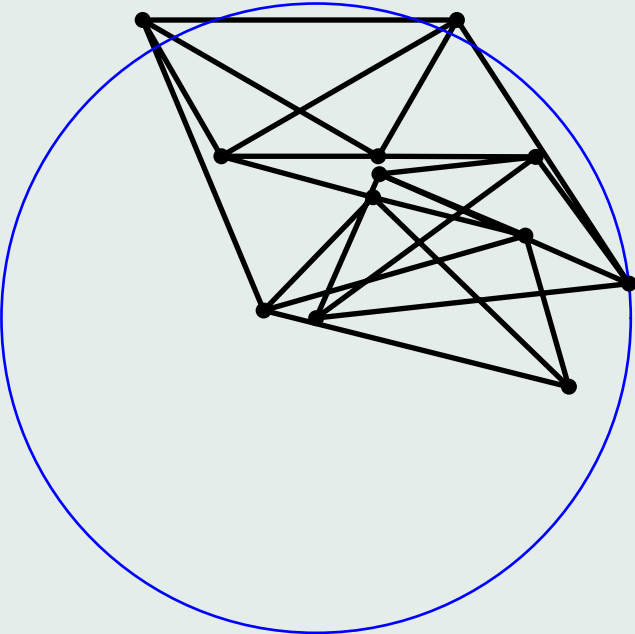
Page 38 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page



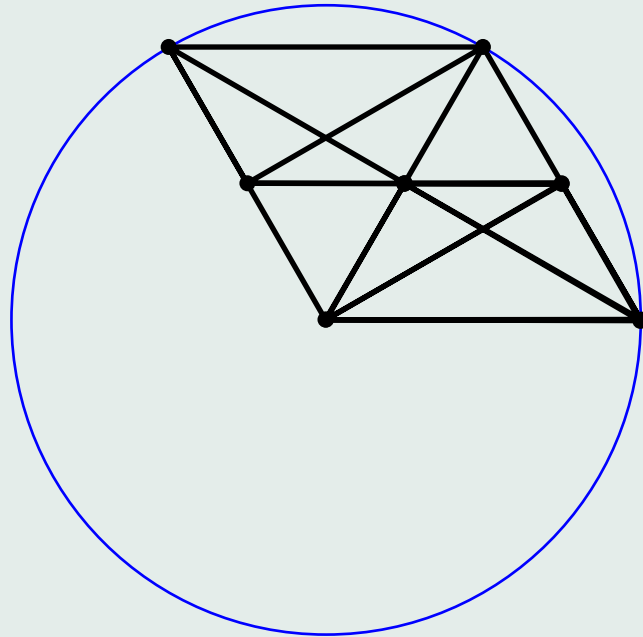
Page 39 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





5. Beispiel

Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

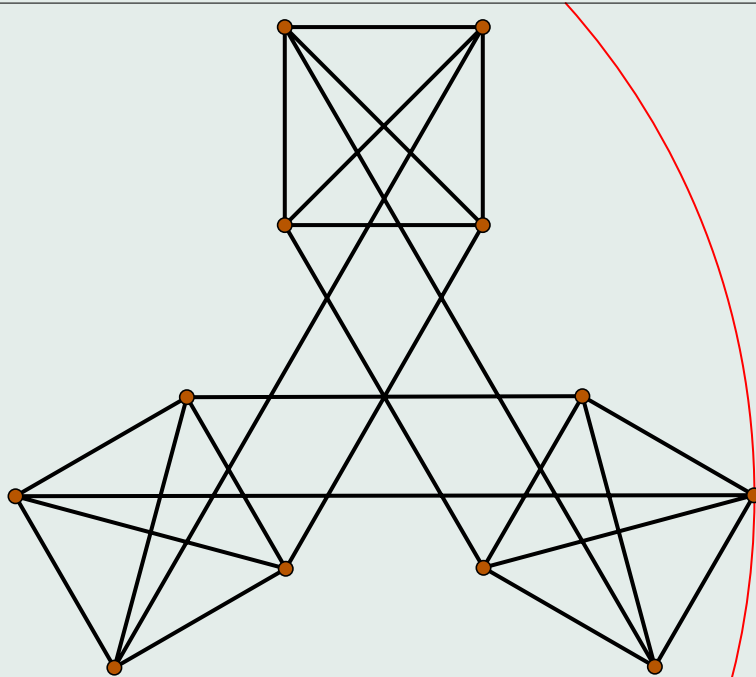
Page 40 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

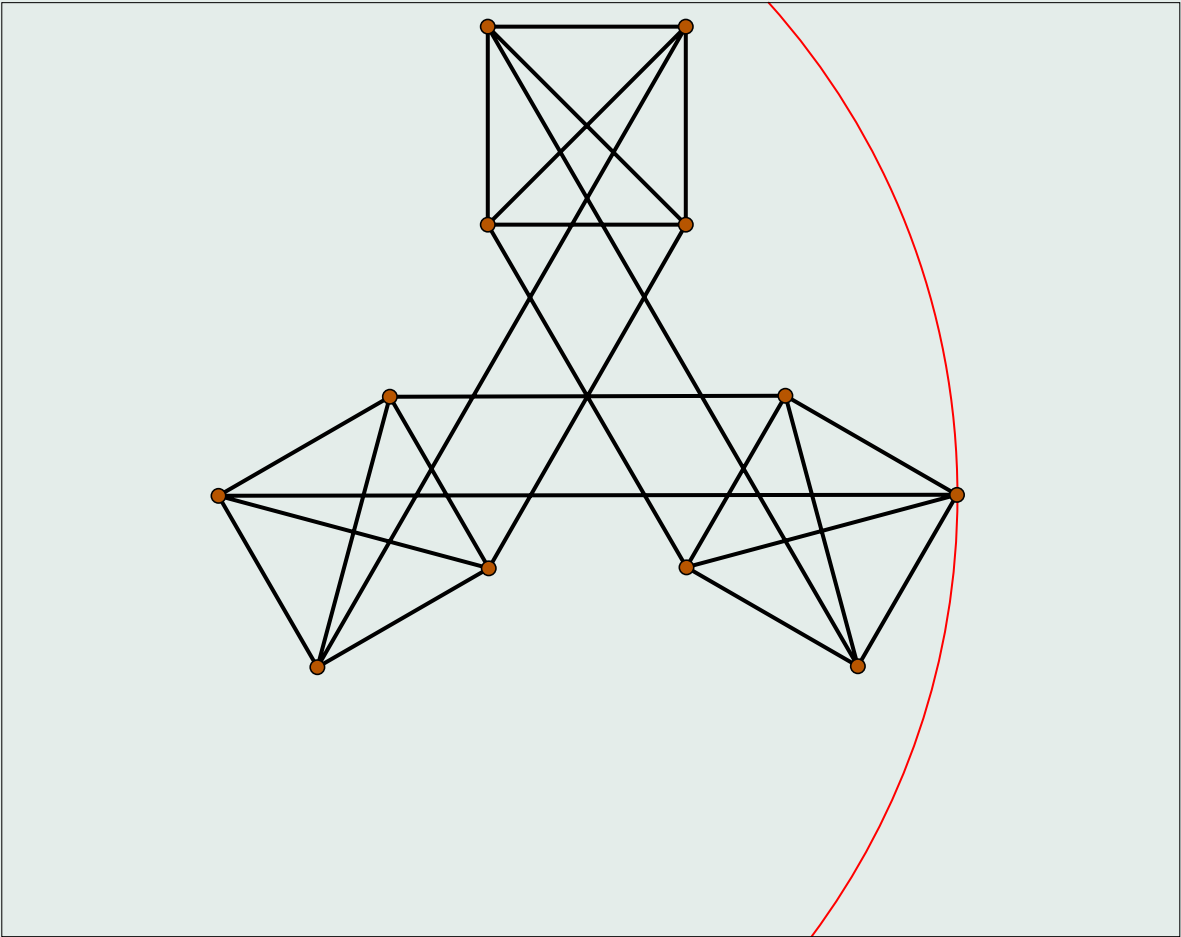
Page 41 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

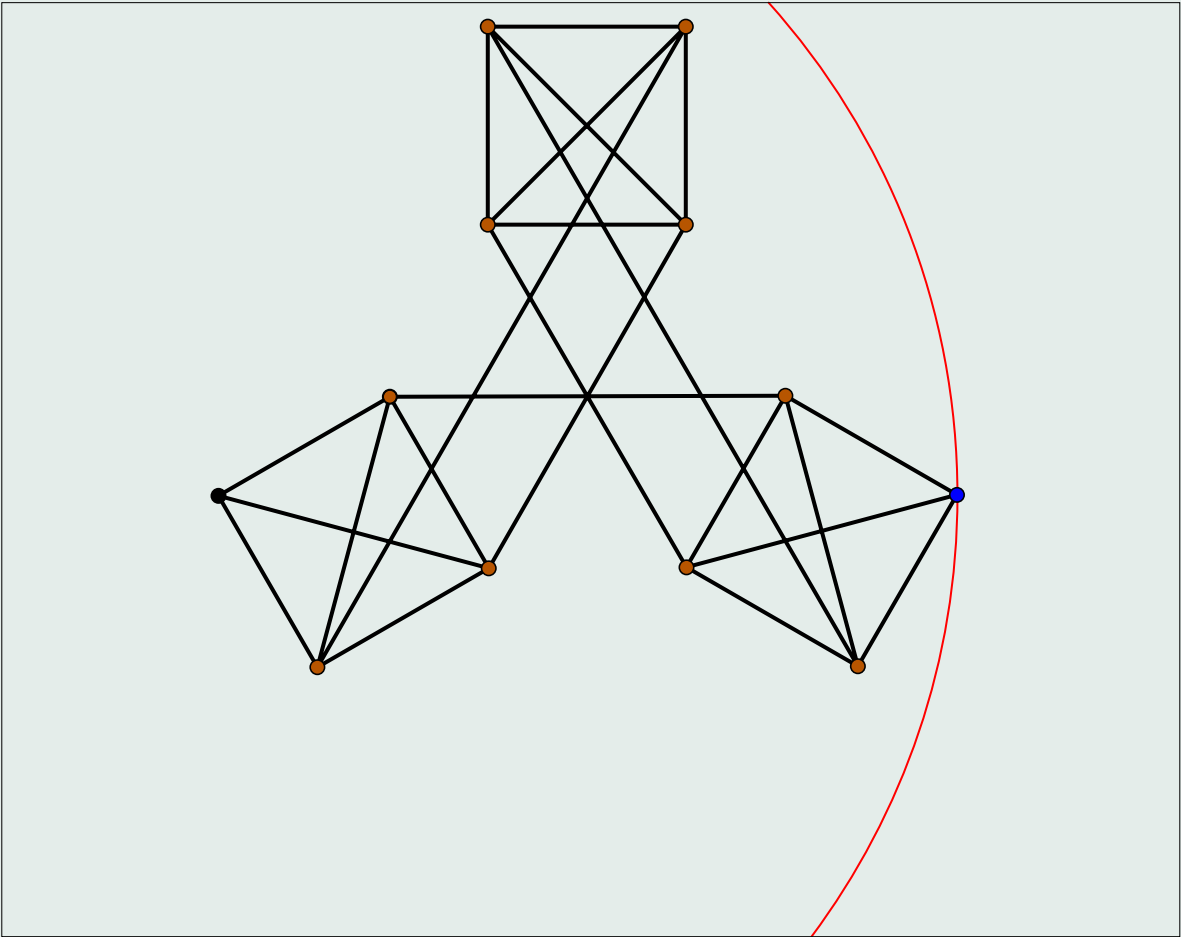
Page 42 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

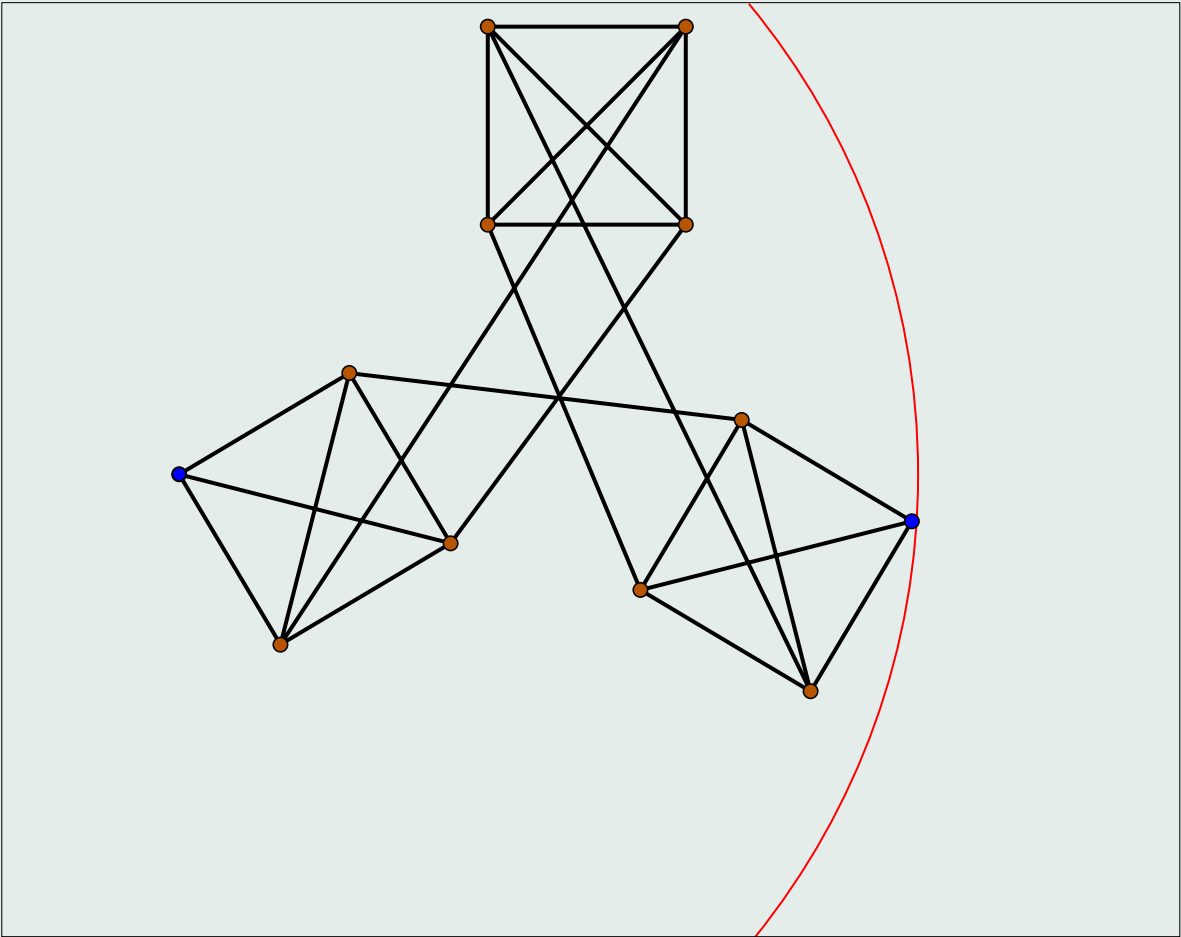
Page 43 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

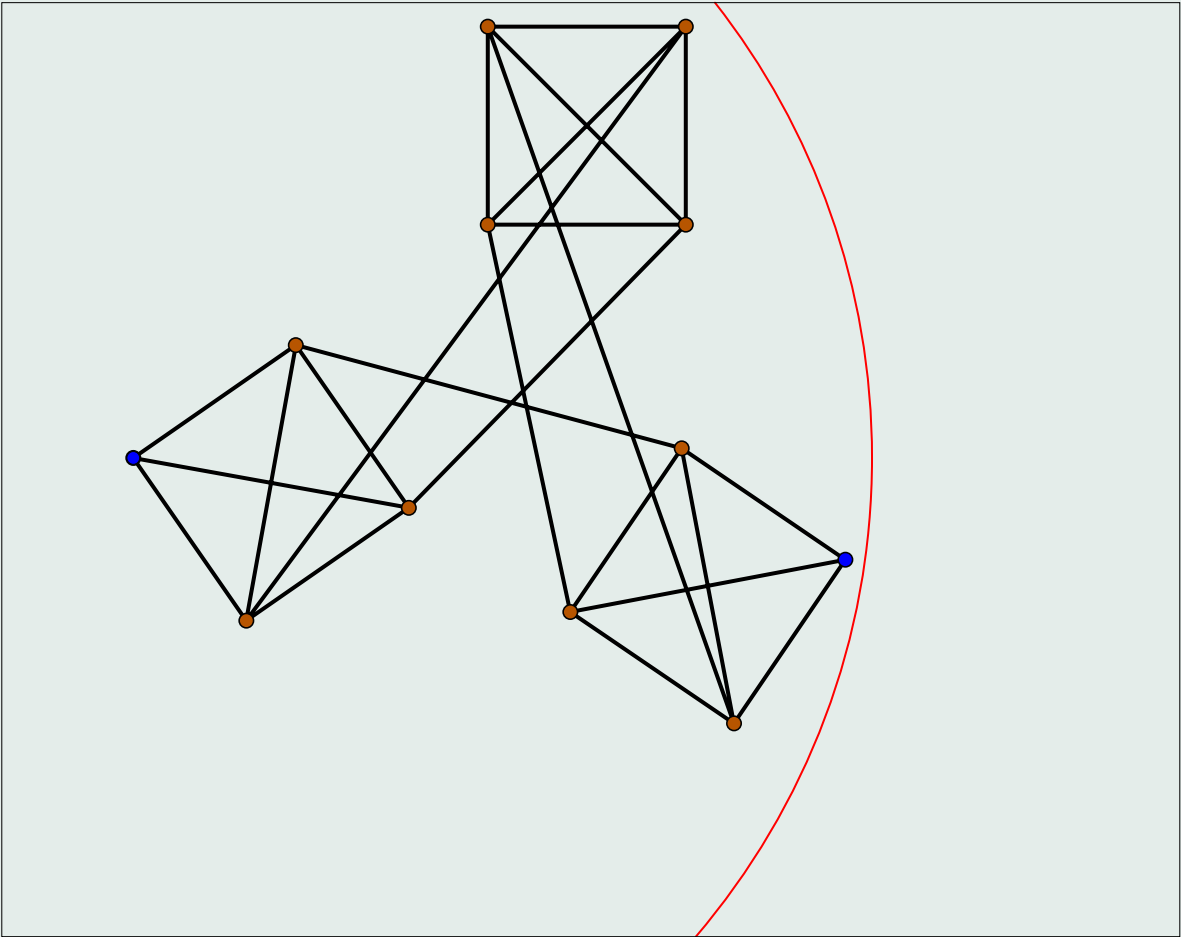
Page 44 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

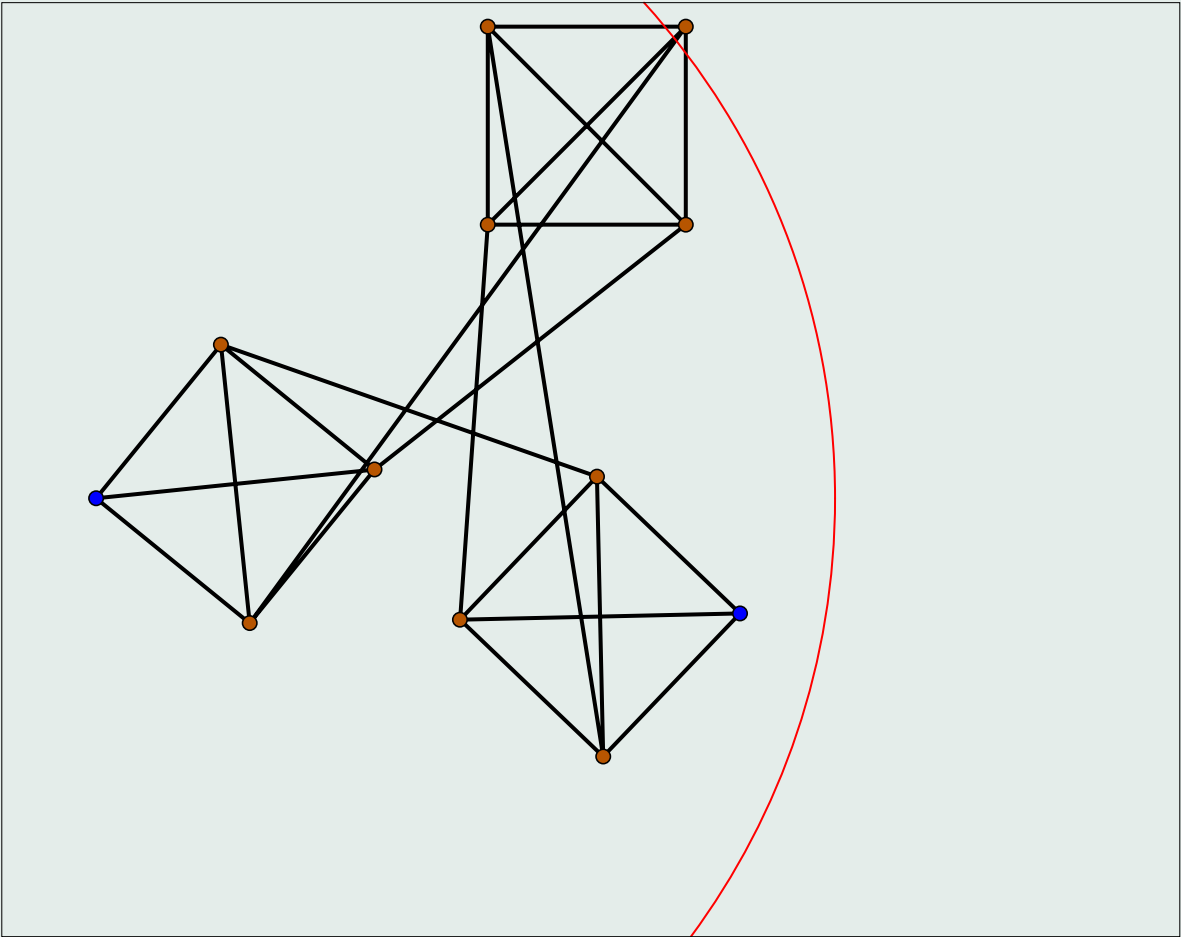
Page 45 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page



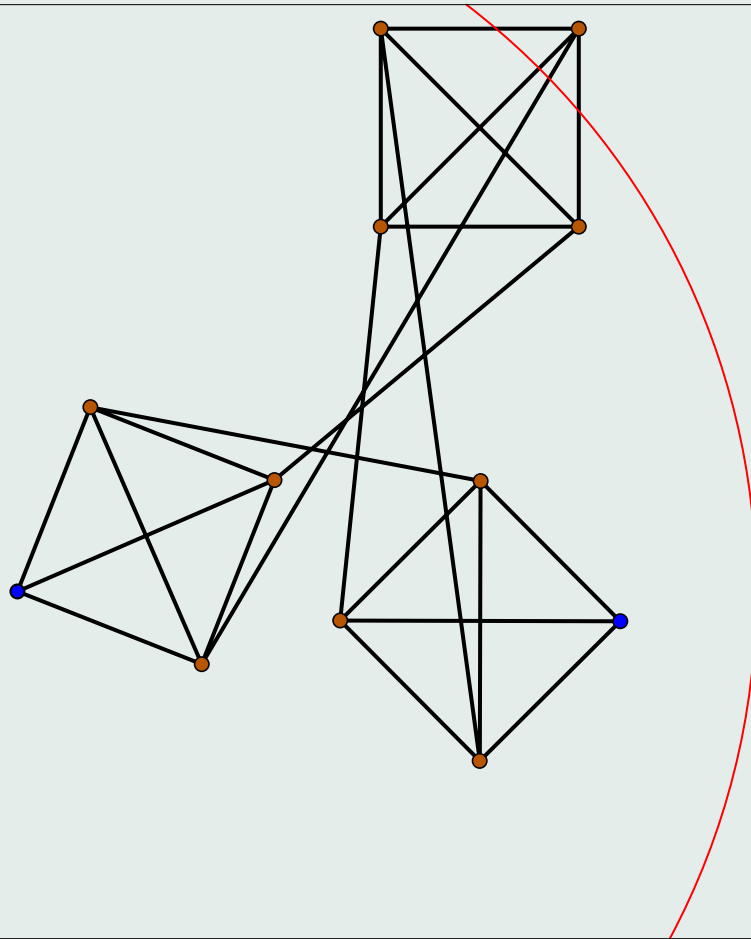
Page 46 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

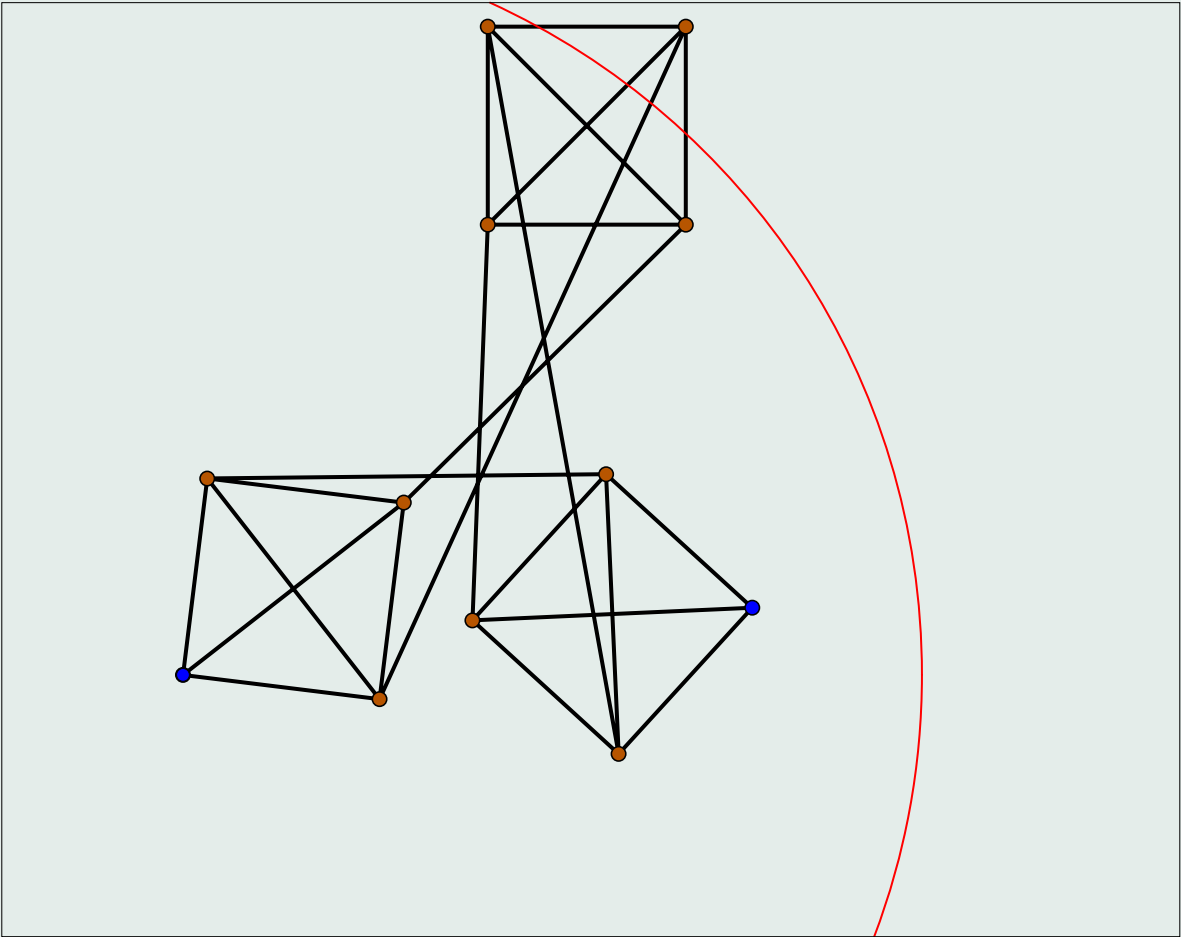
Page 47 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

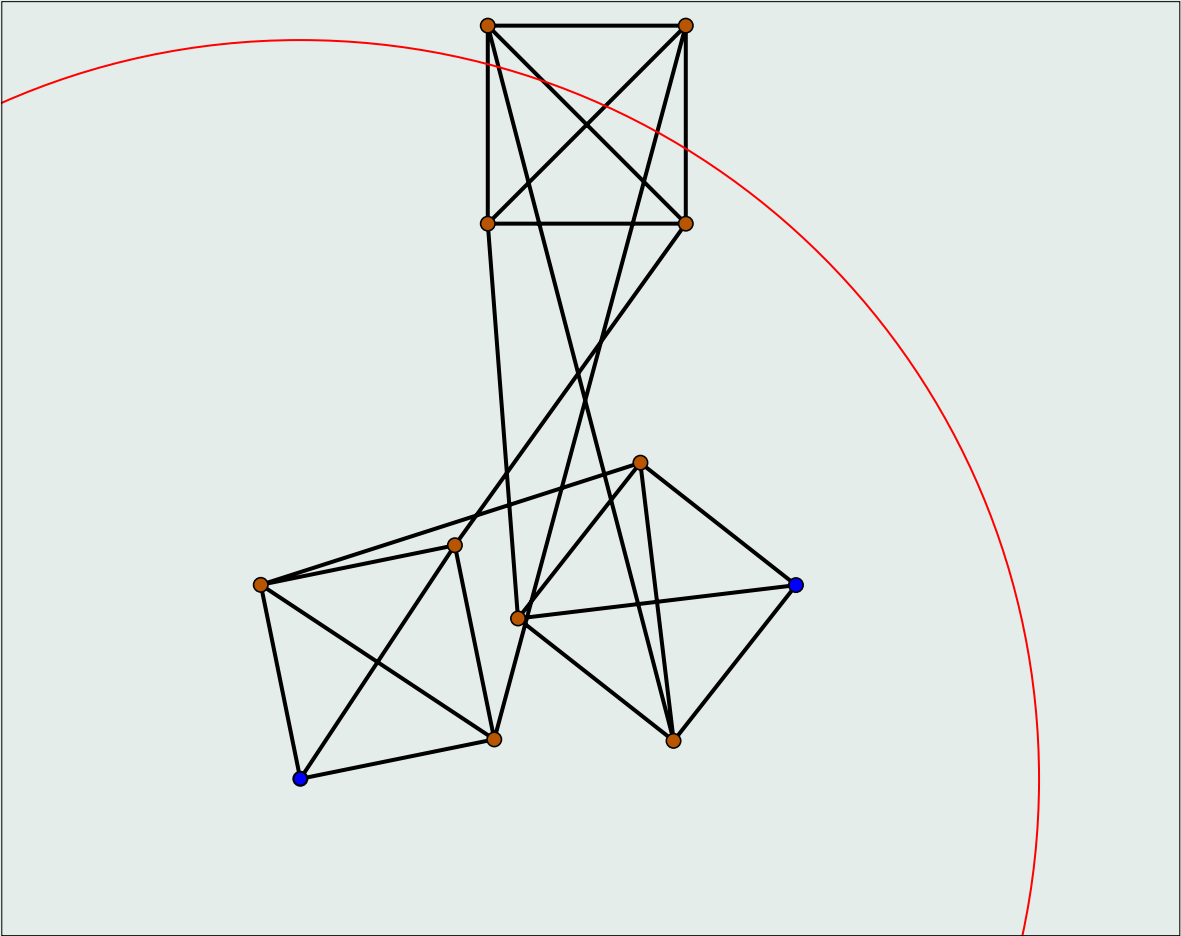
Page 48 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

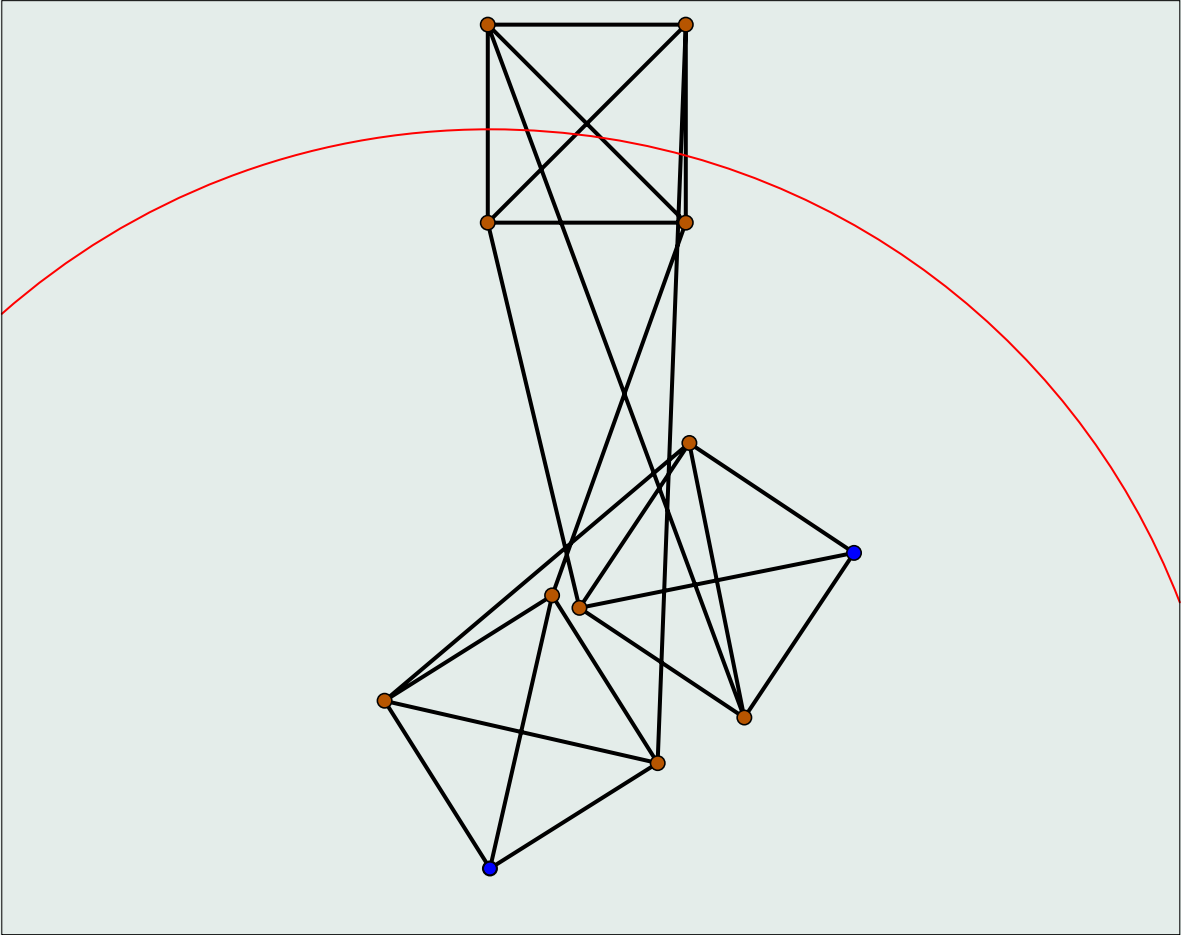
Page 49 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

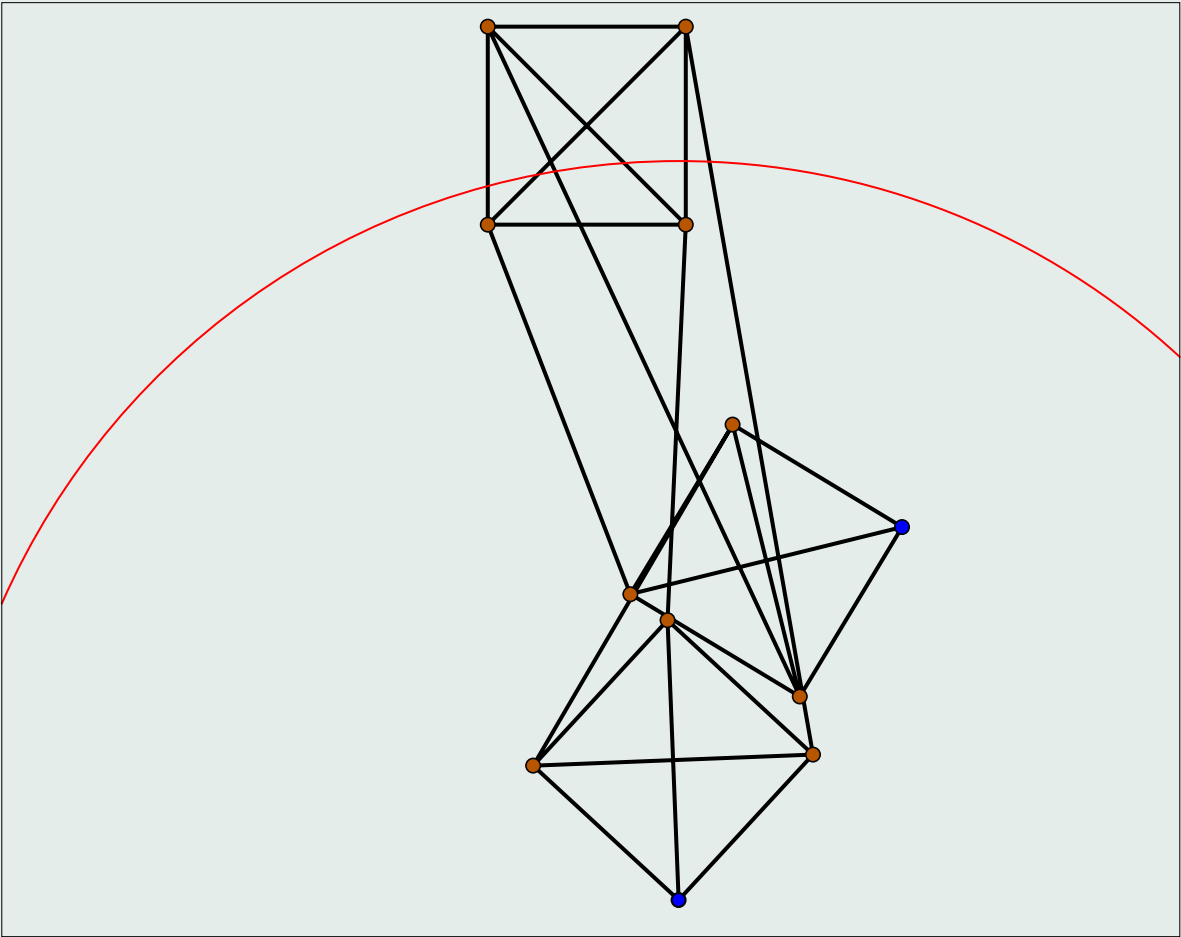
Page 50 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

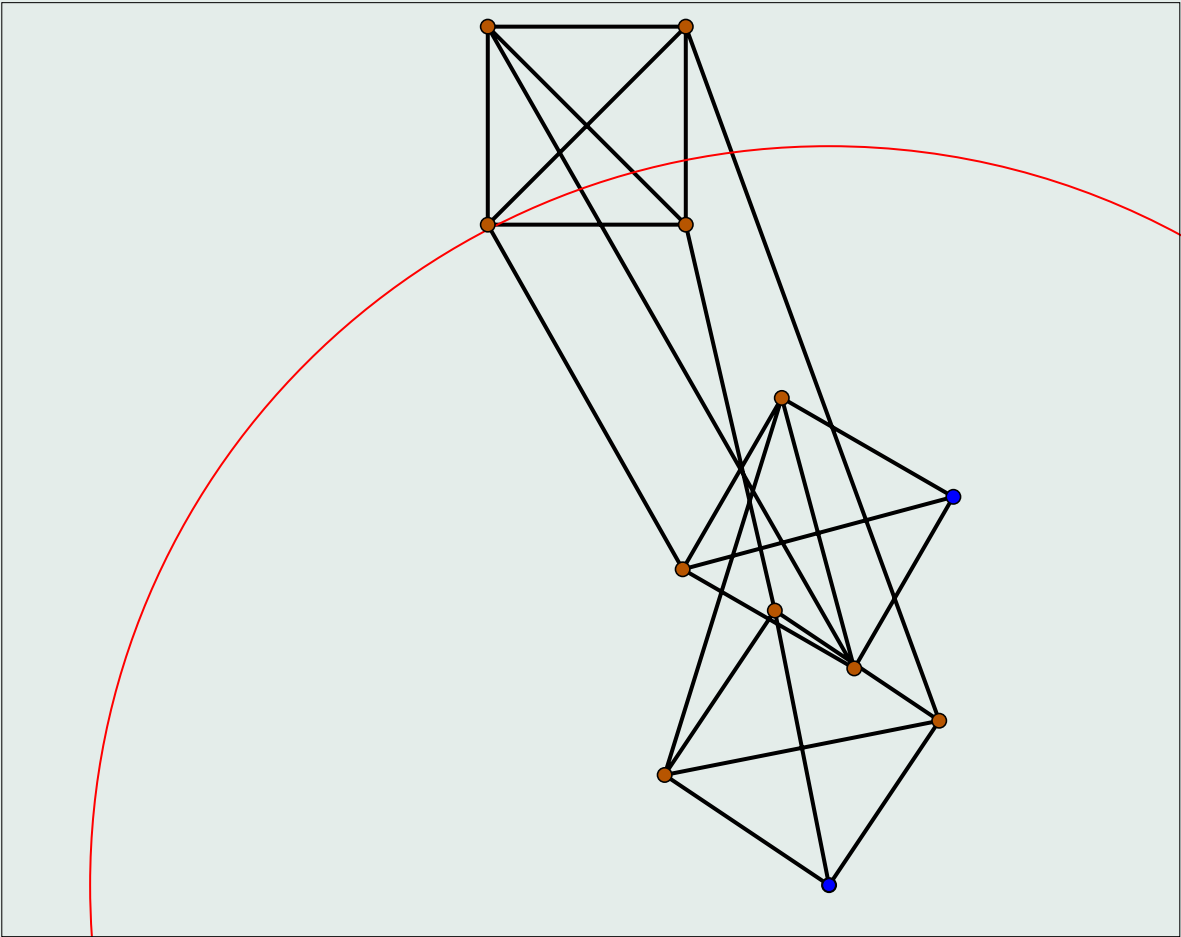
Page 51 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

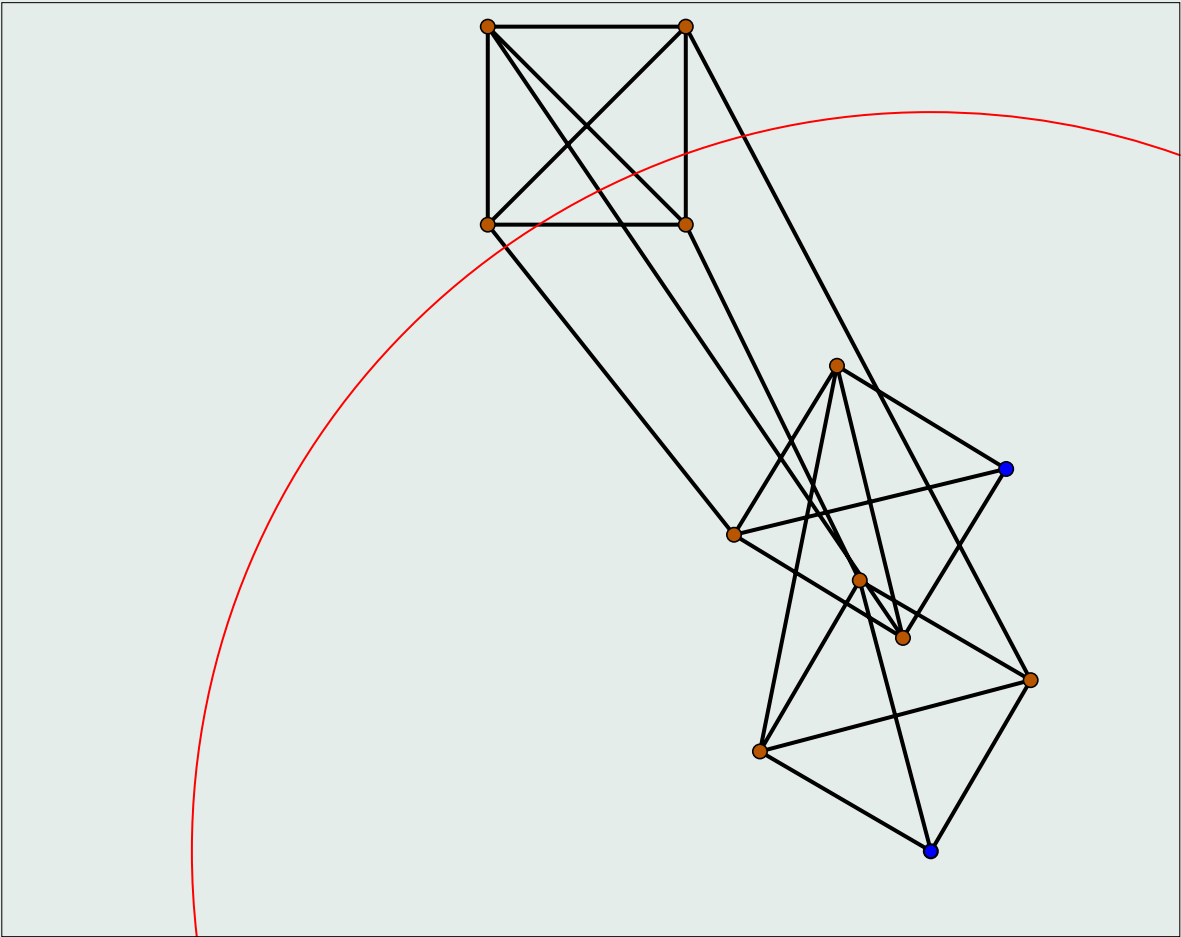
Page 52 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

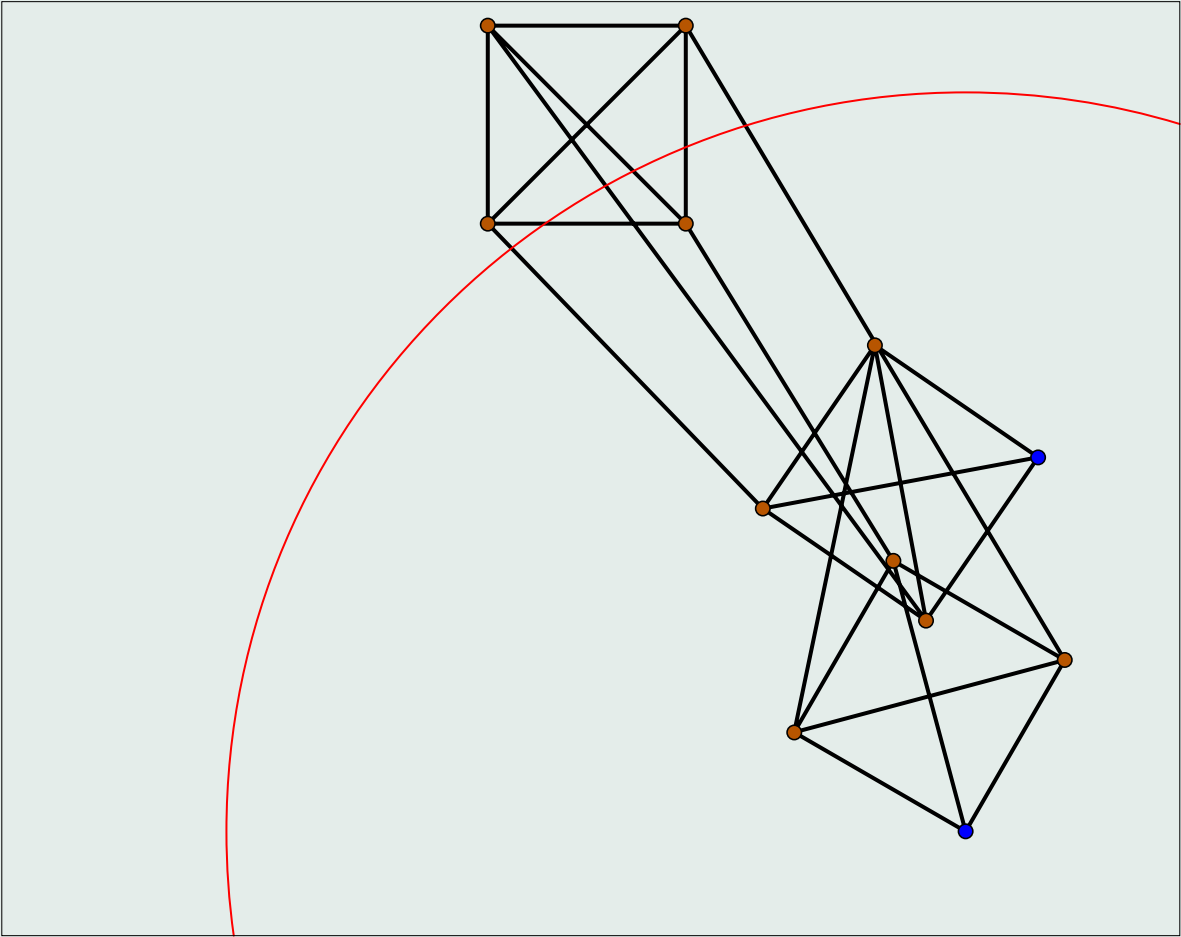
Page 53 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

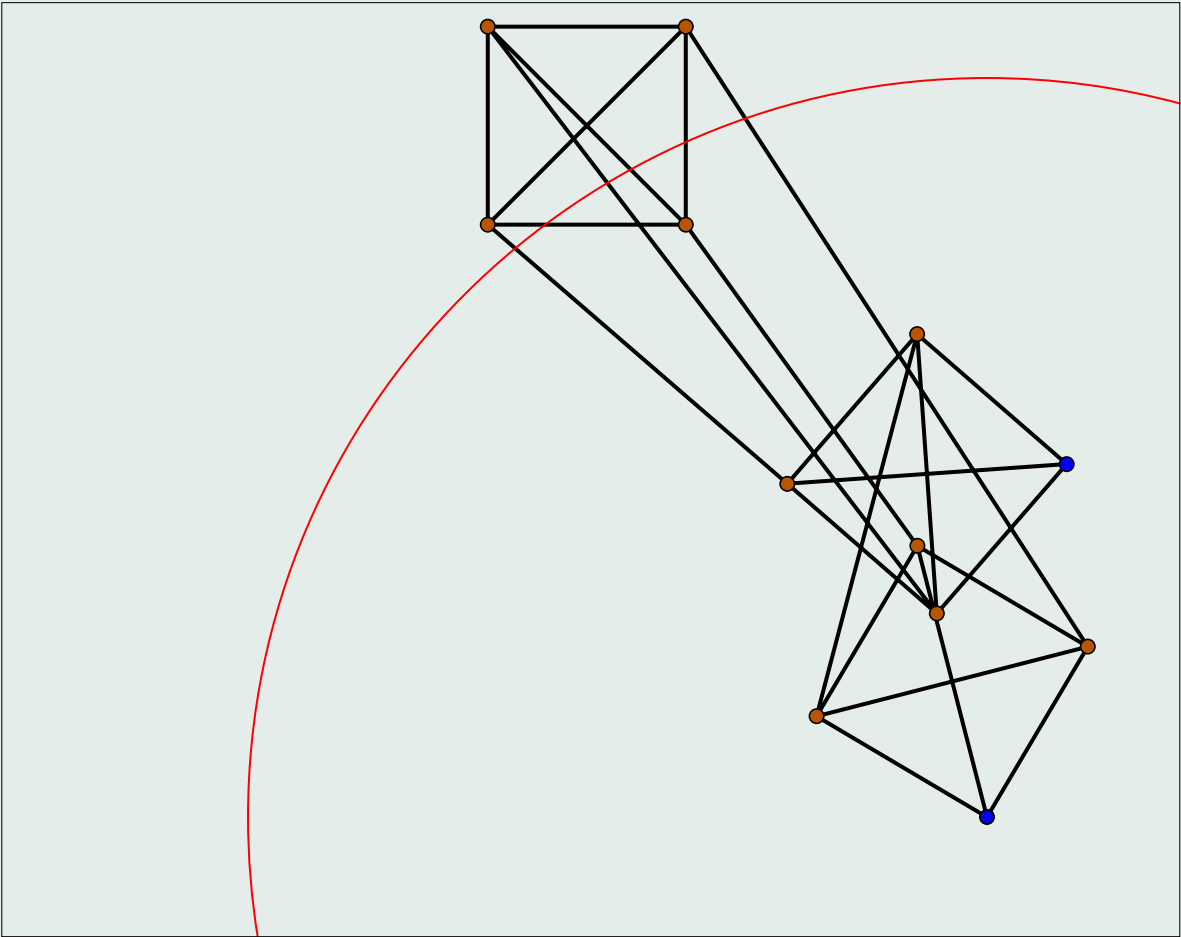
Page 54 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

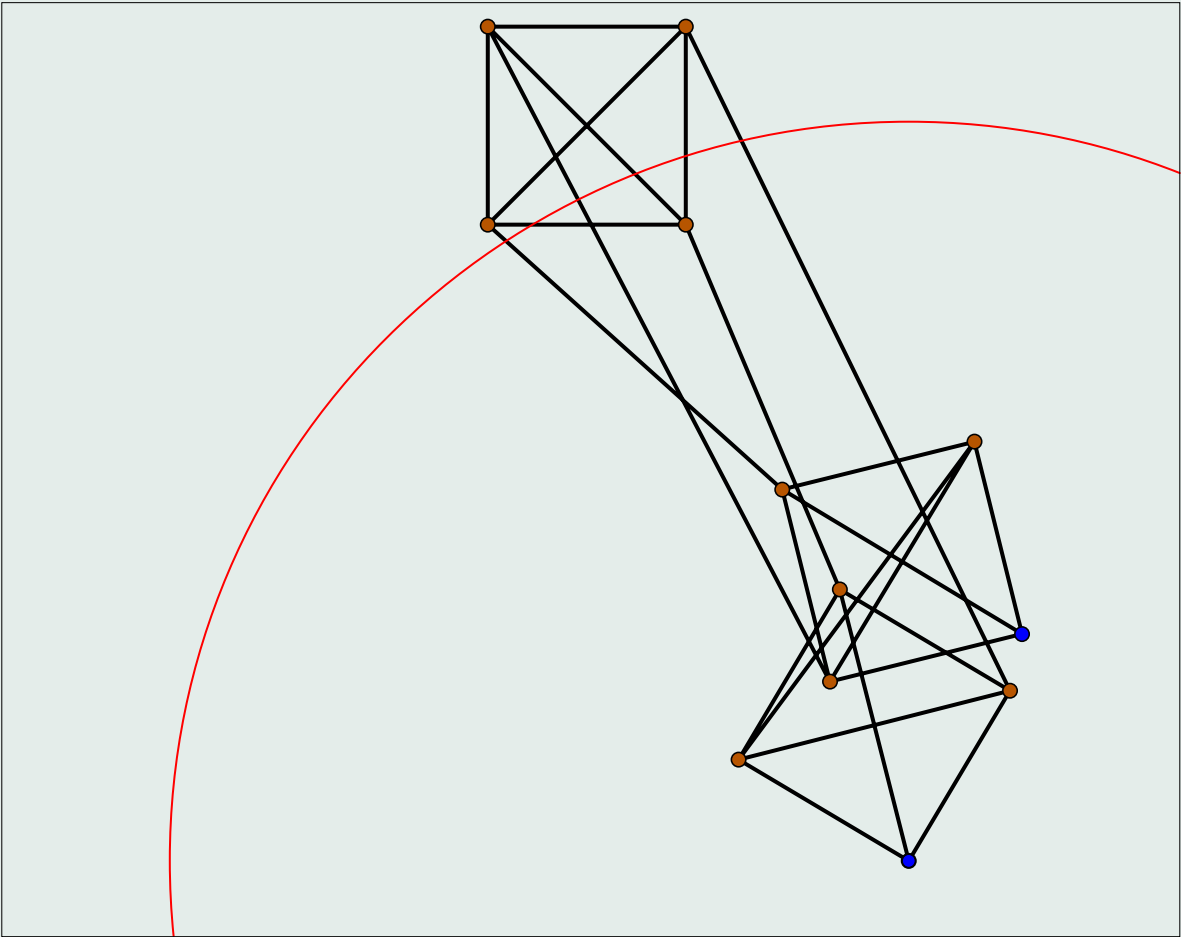
Page 55 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

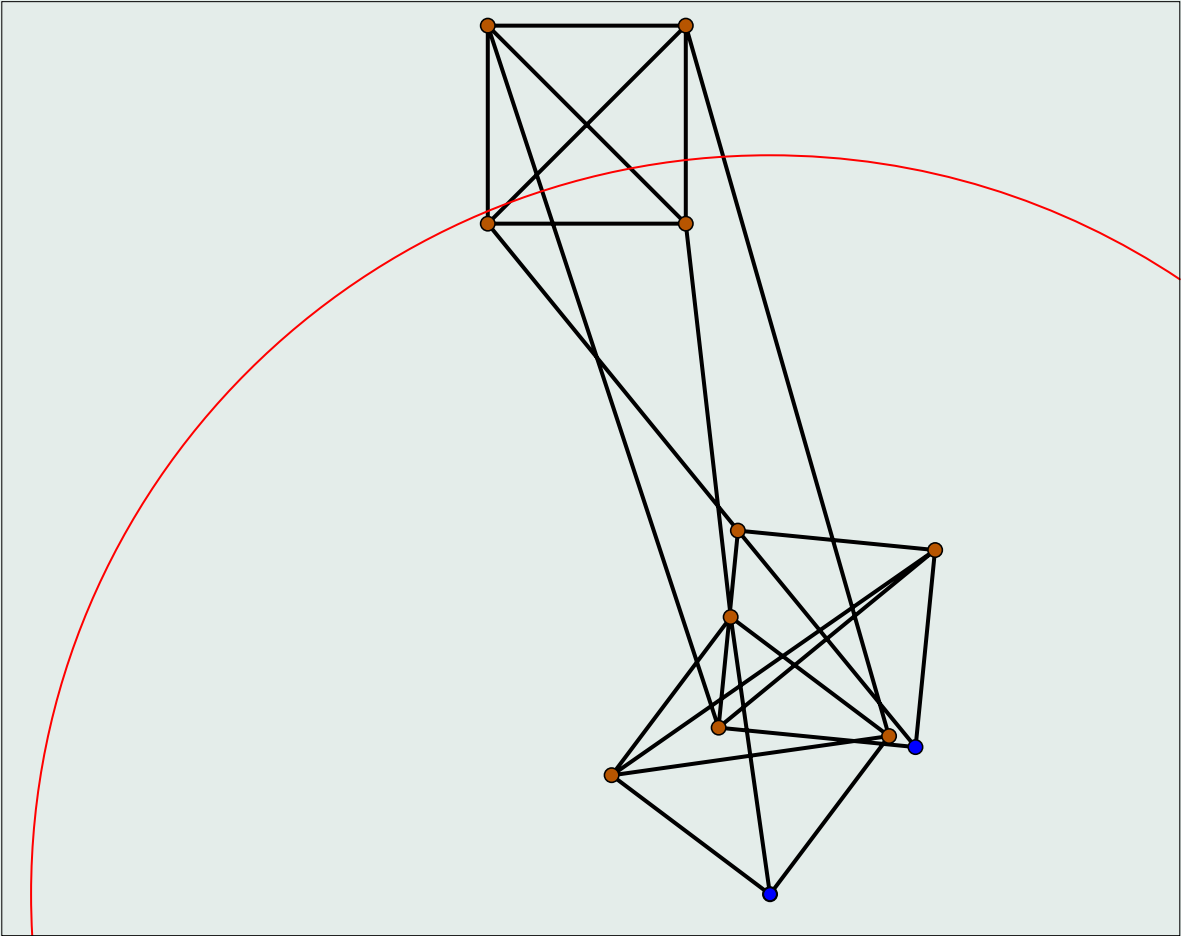
Page 56 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

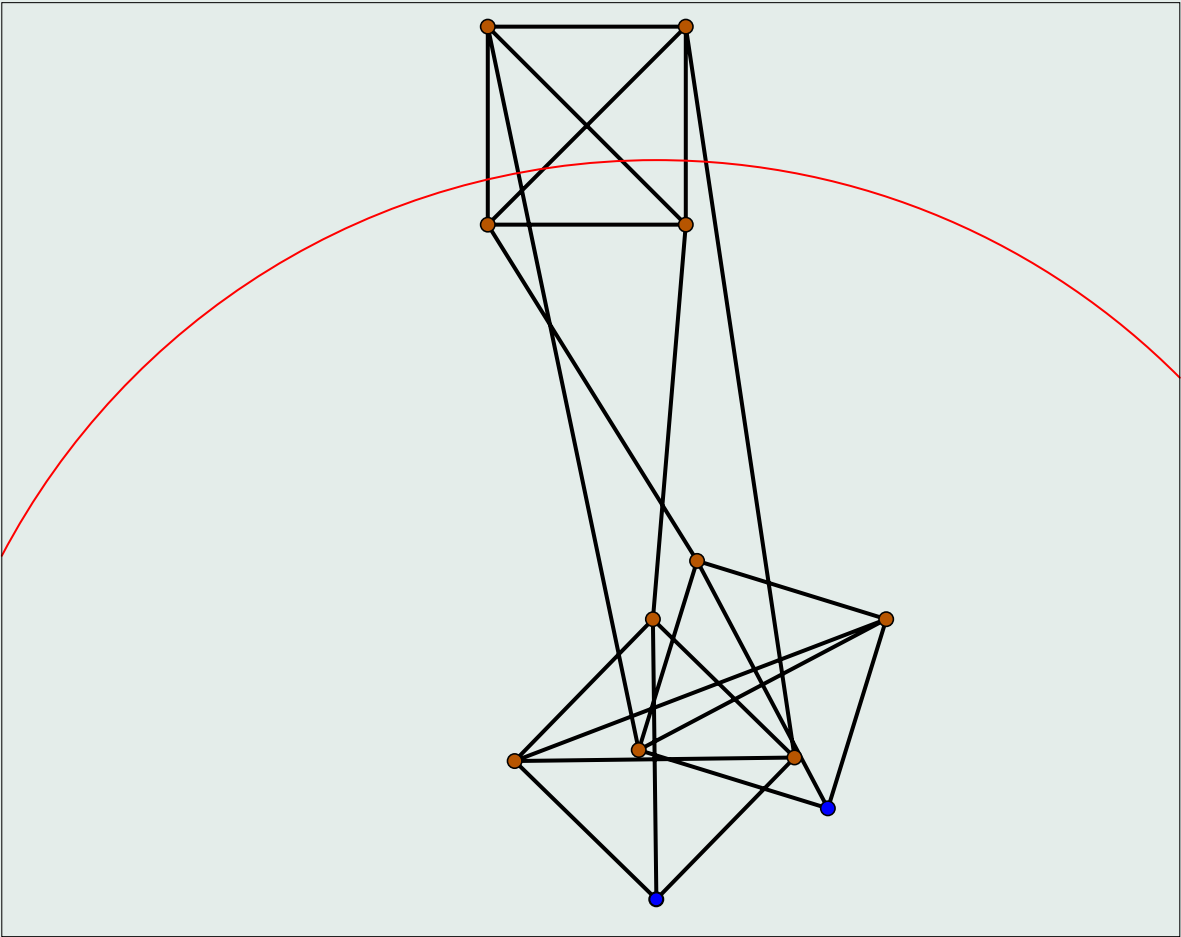
Page 57 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

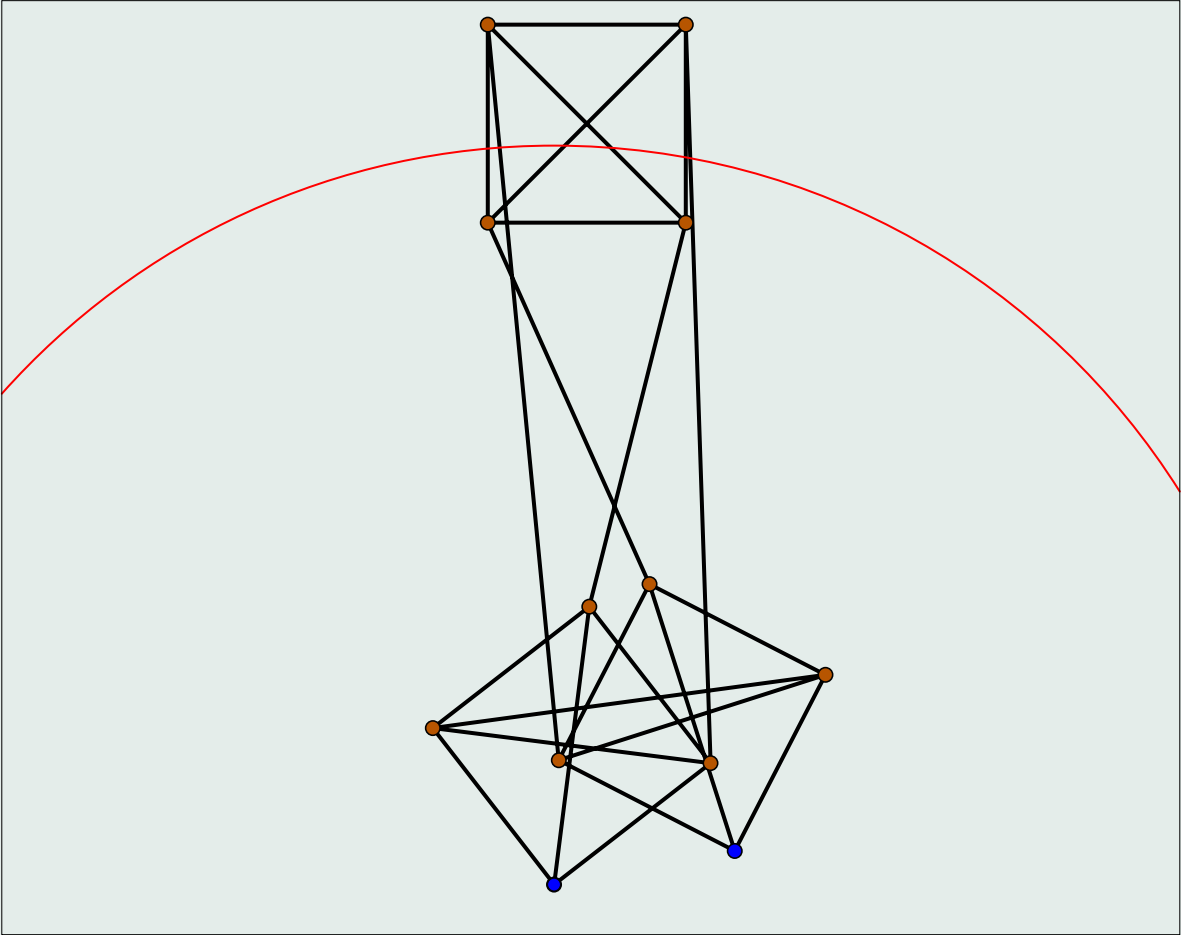
Page 58 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

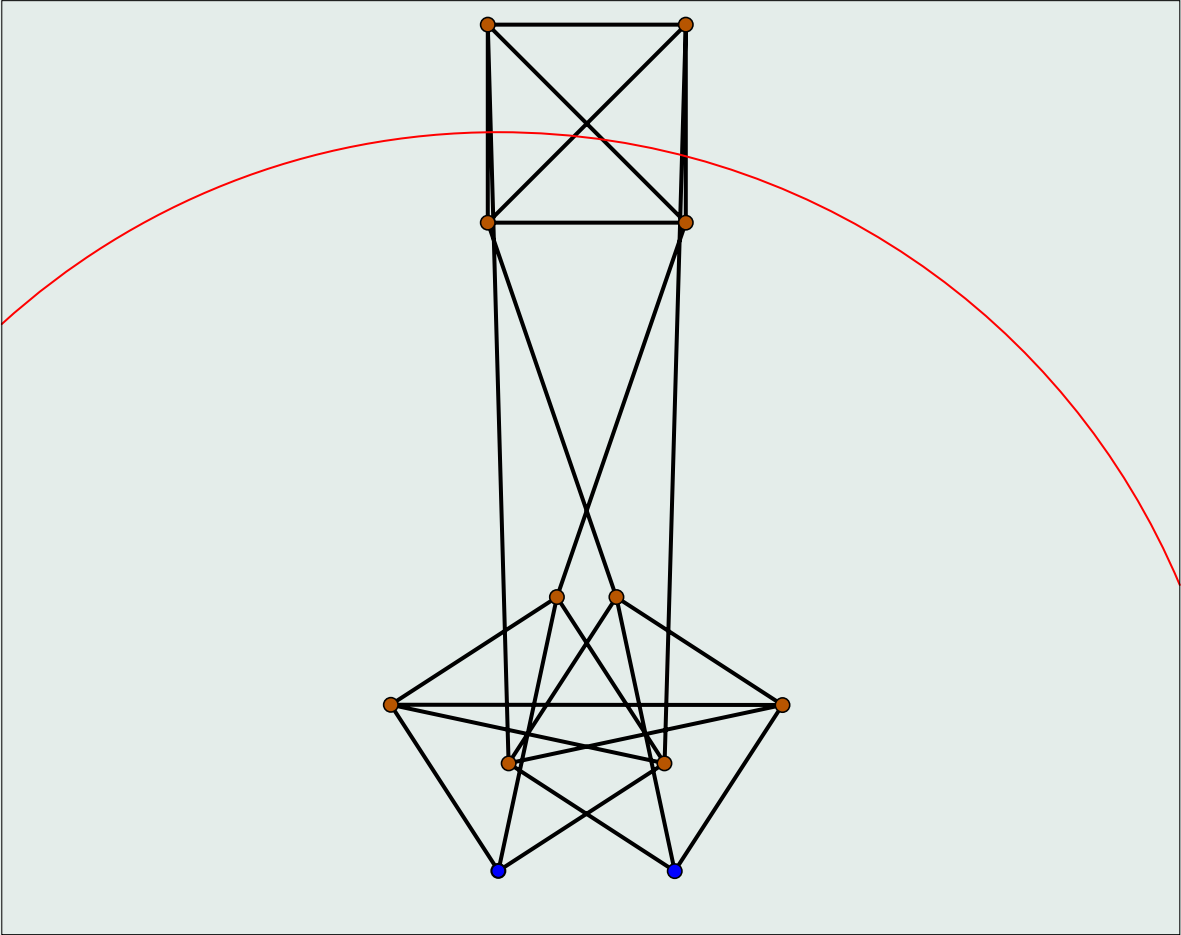
Page 59 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

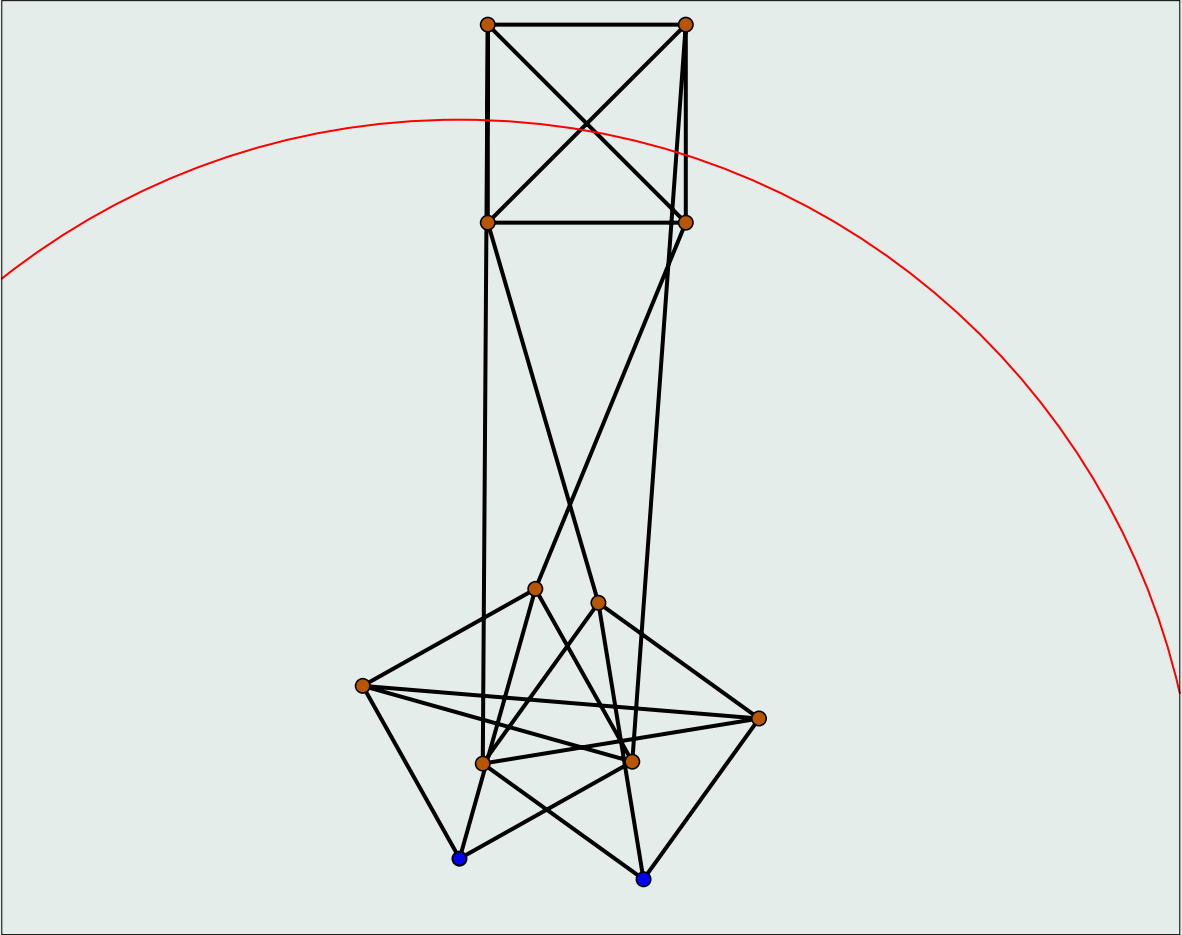
Page 60 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

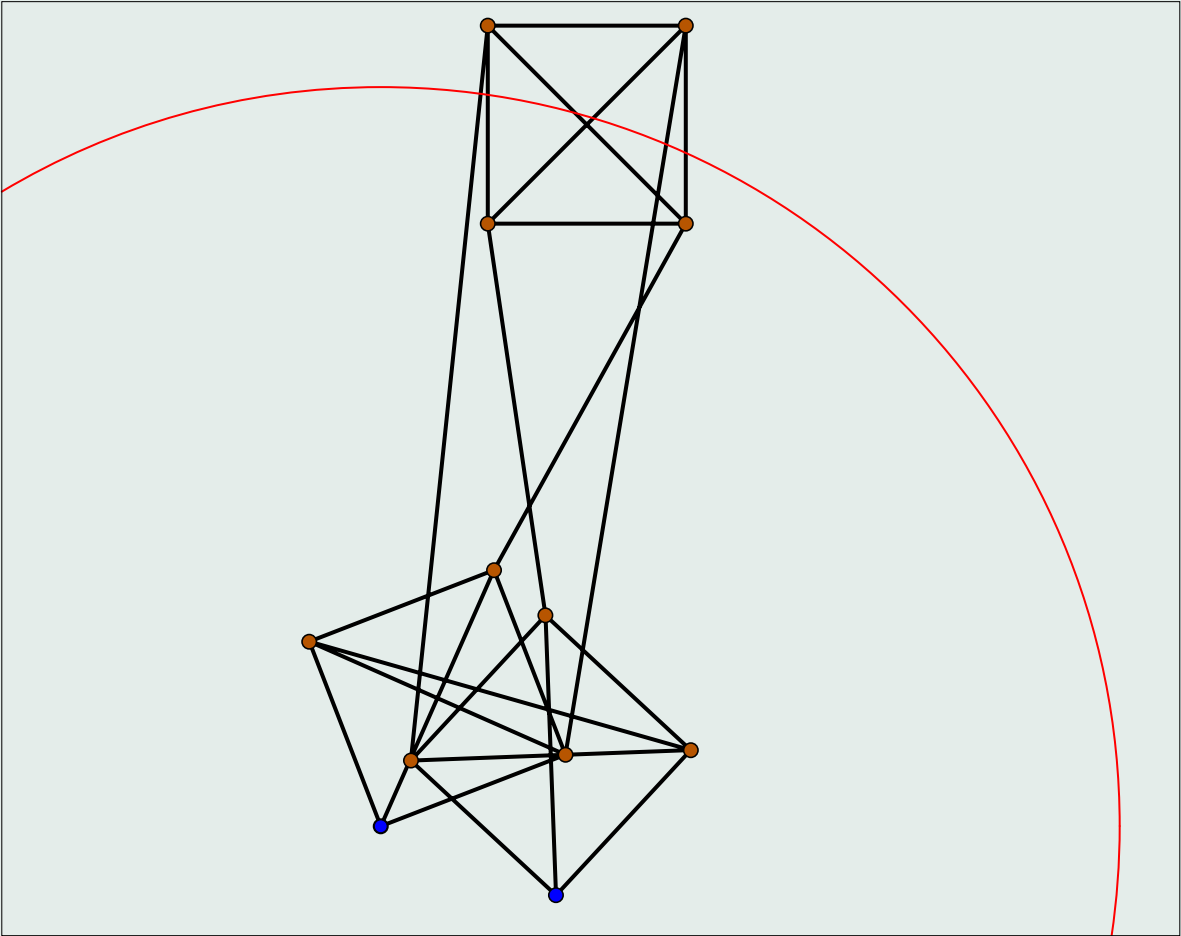
Page 61 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

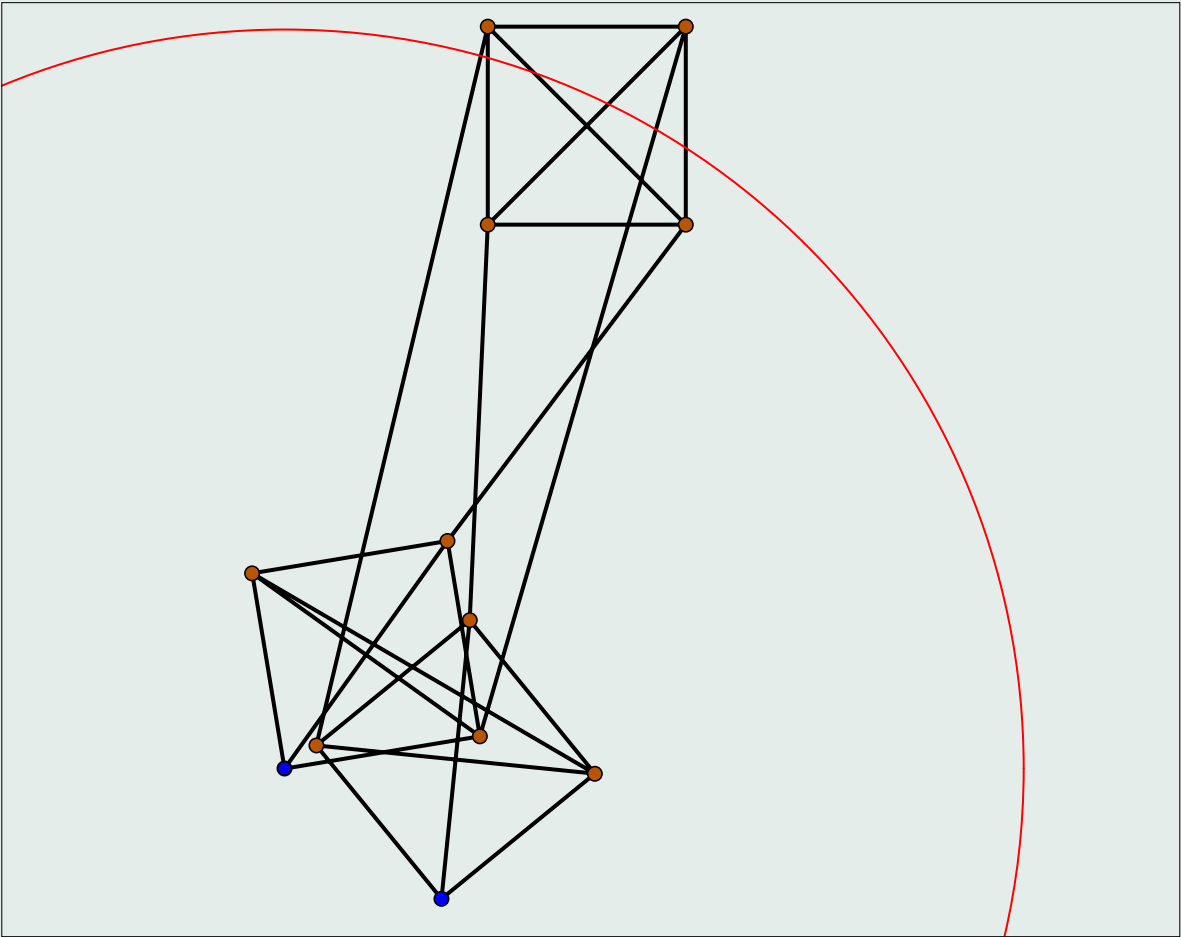
Page 62 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

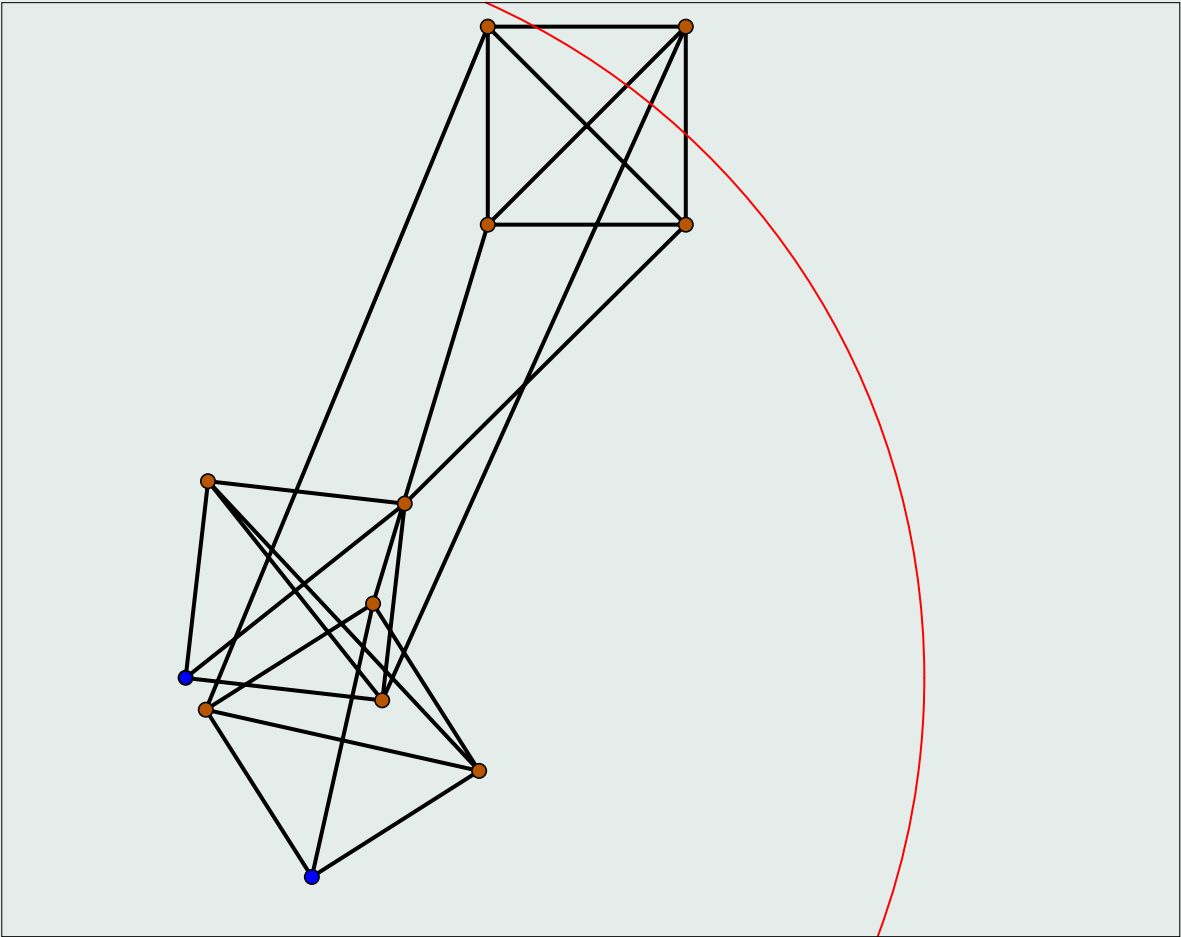
Page 63 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

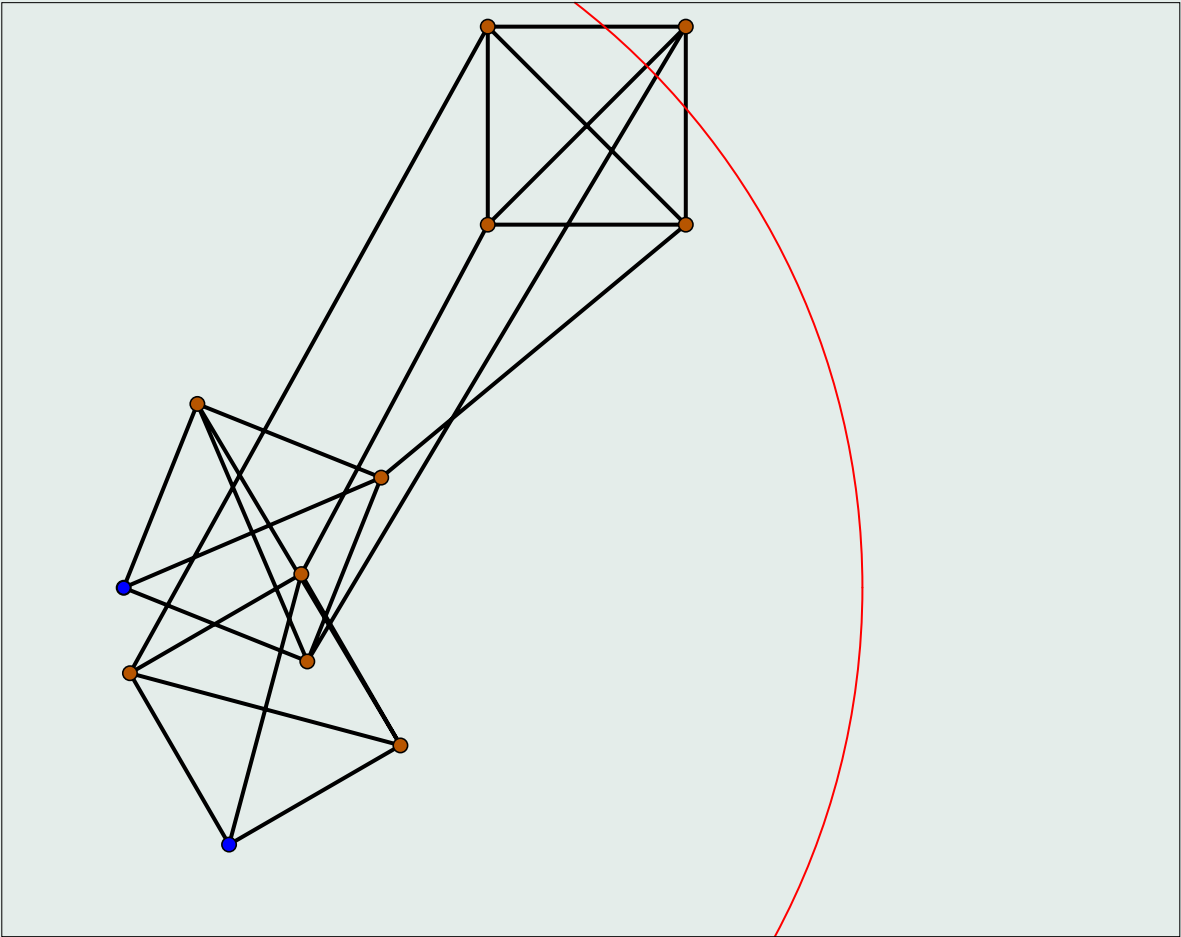
Page 64 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

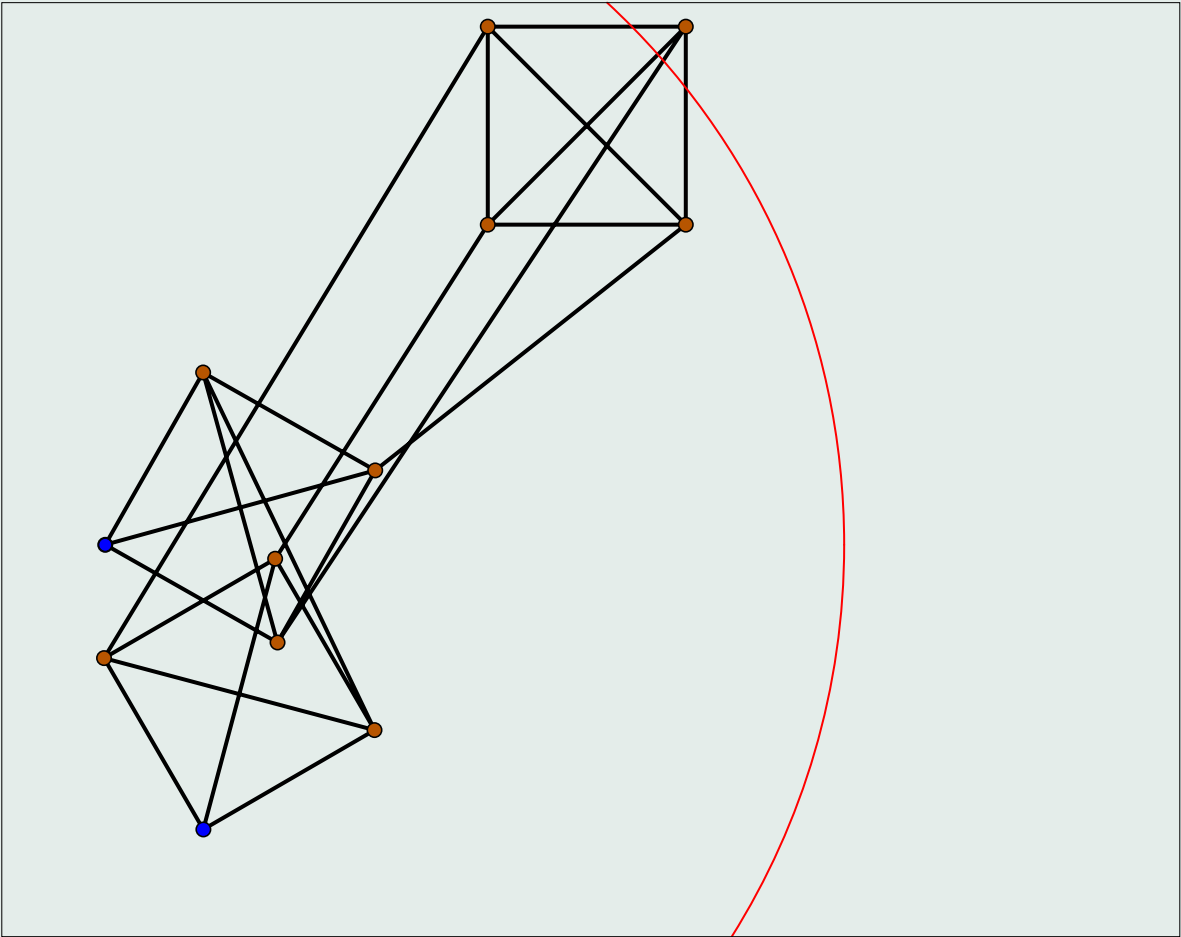
Page 65 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

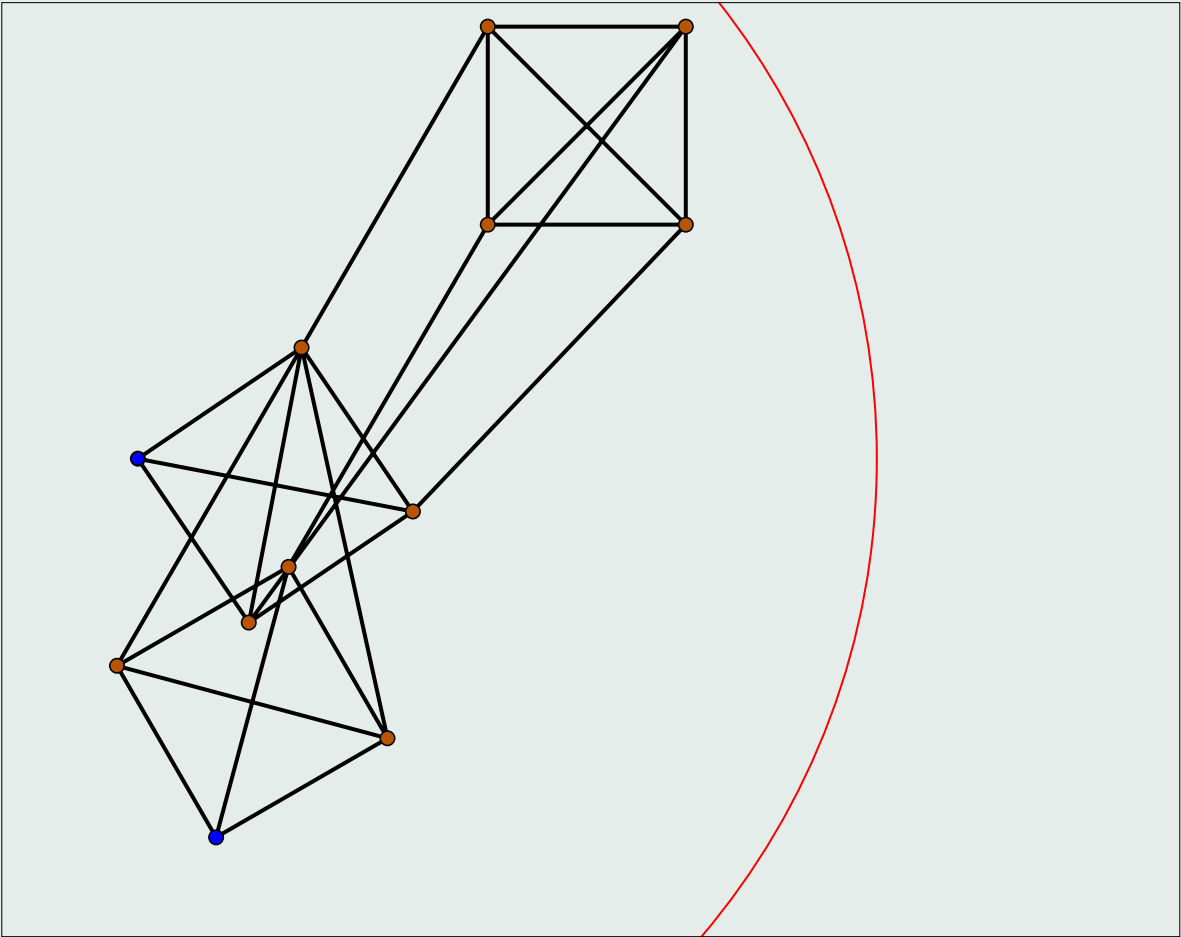
Page 66 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page



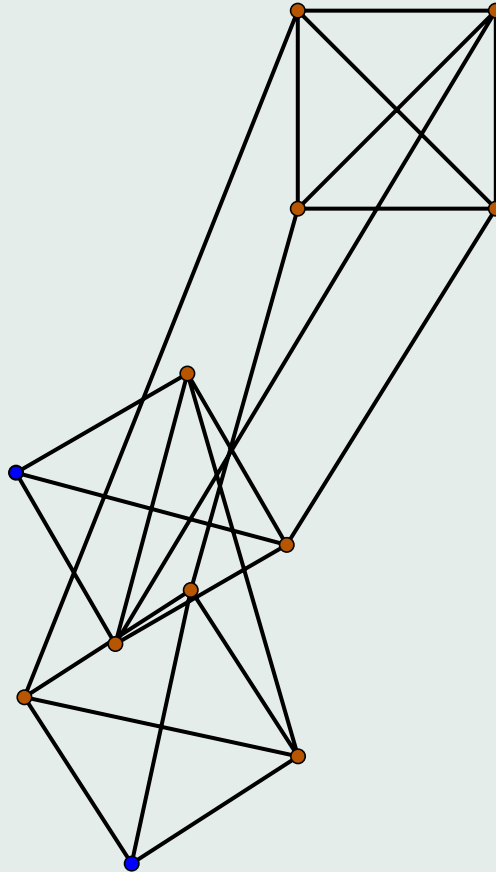
Page 67 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

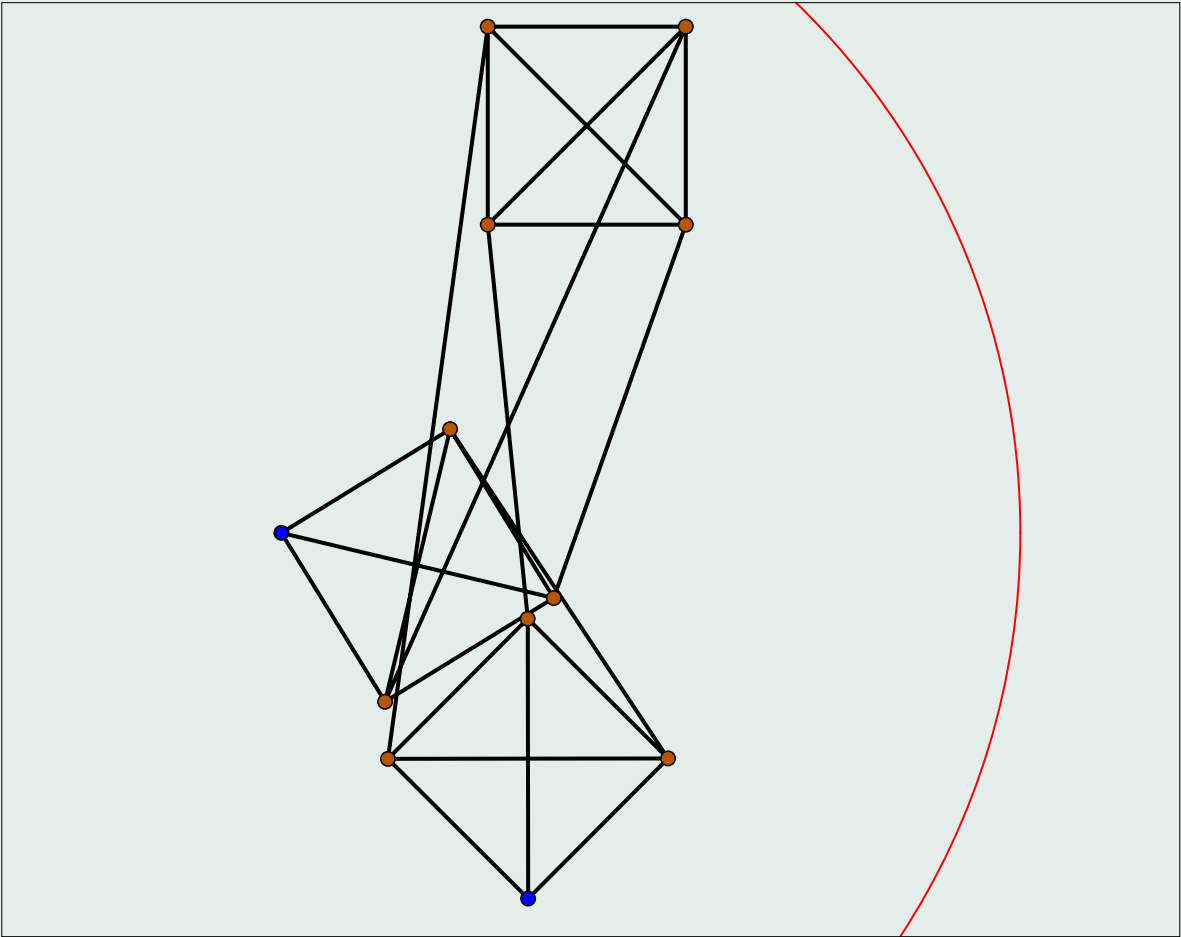
Page 68 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

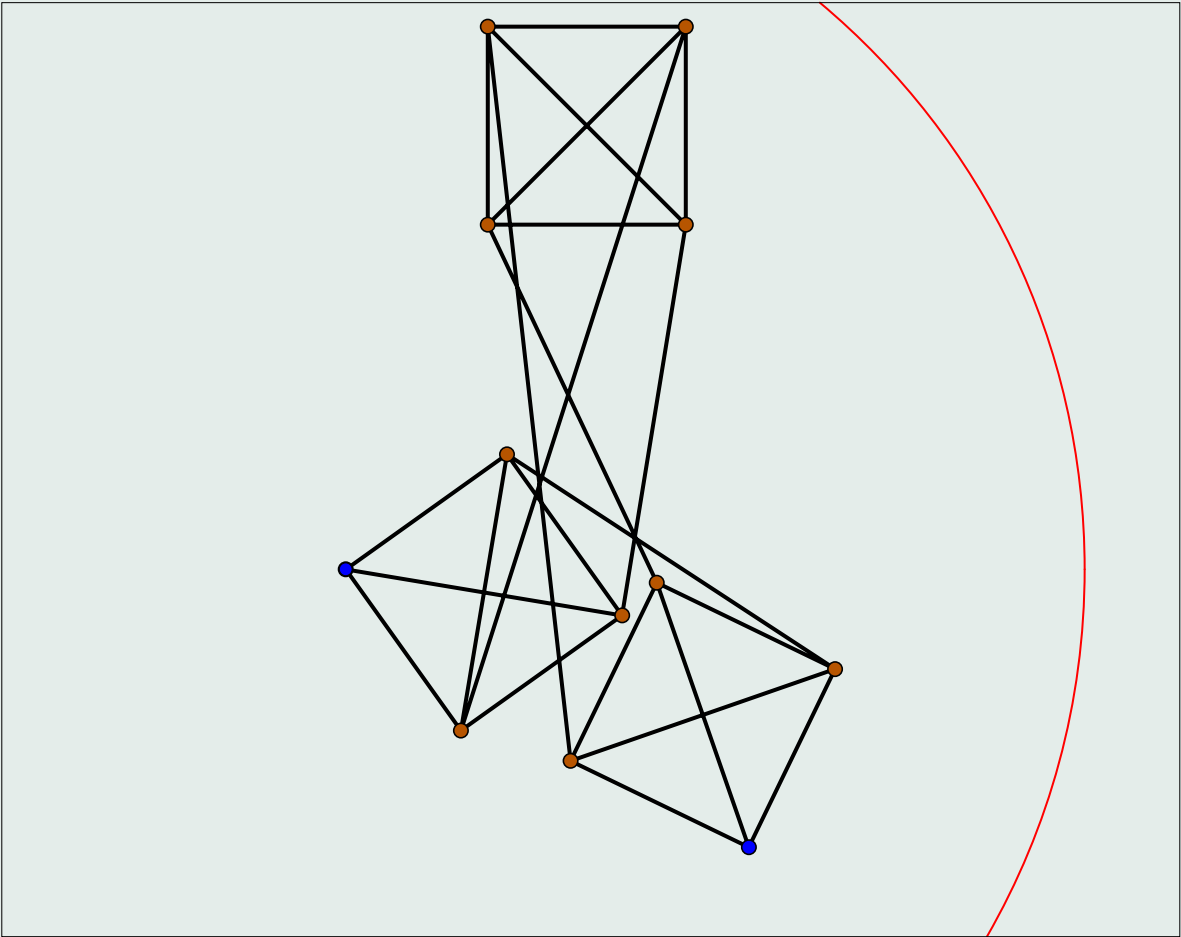
Page 69 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

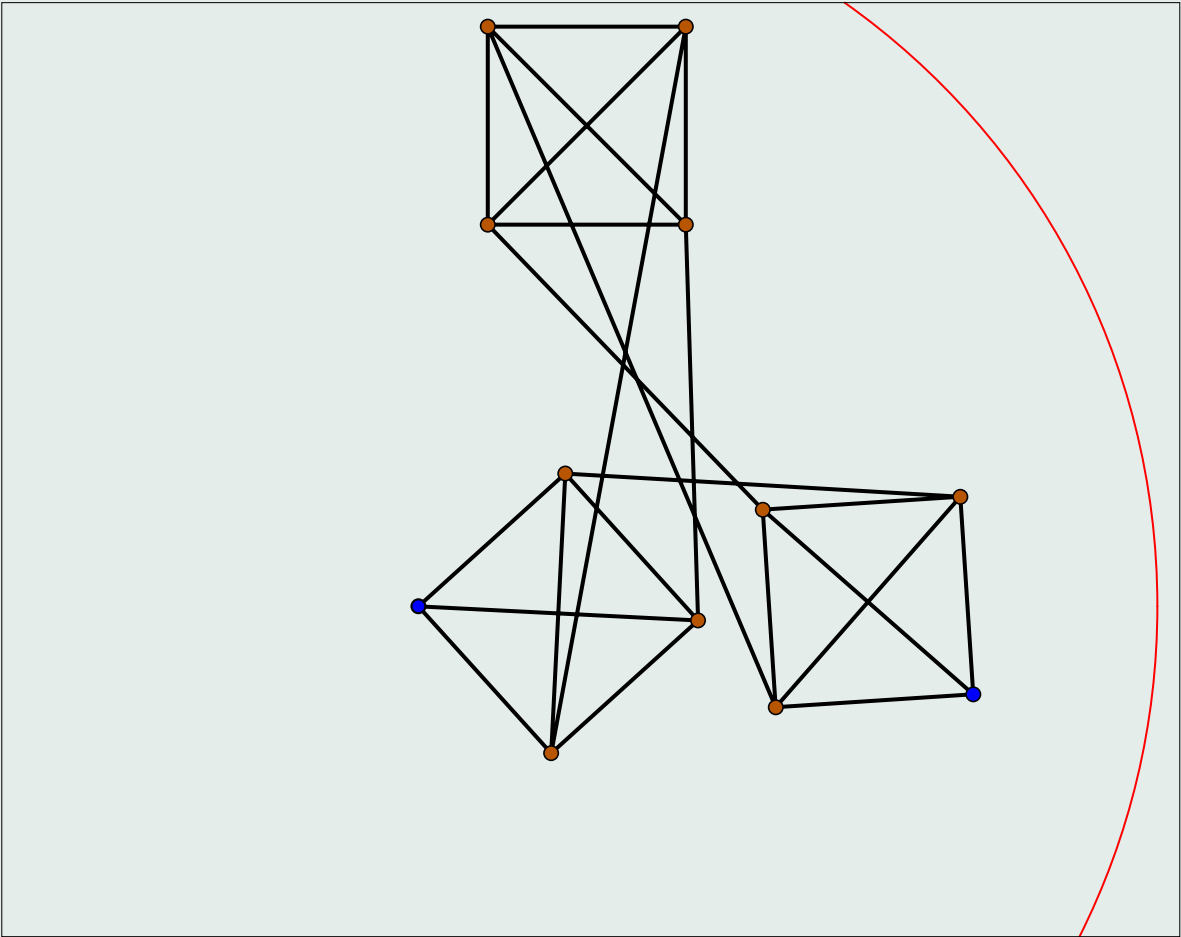
Page 70 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page



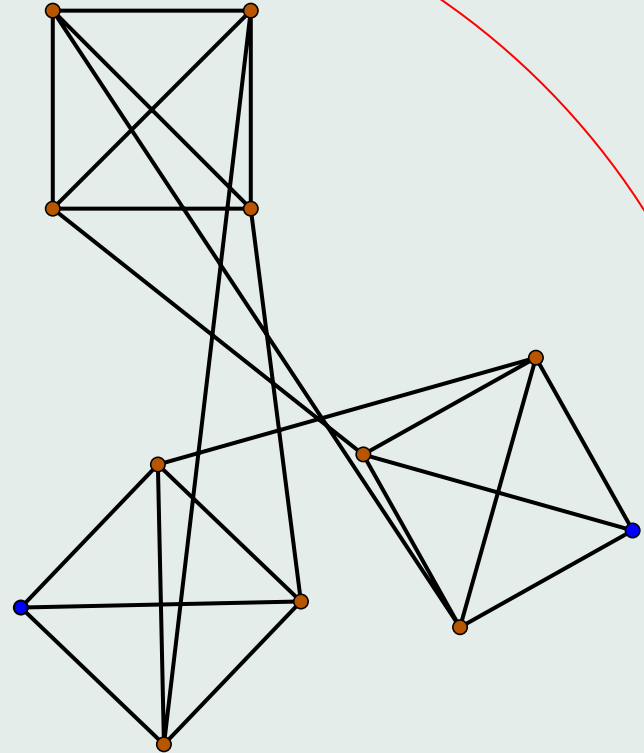
Page 71 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

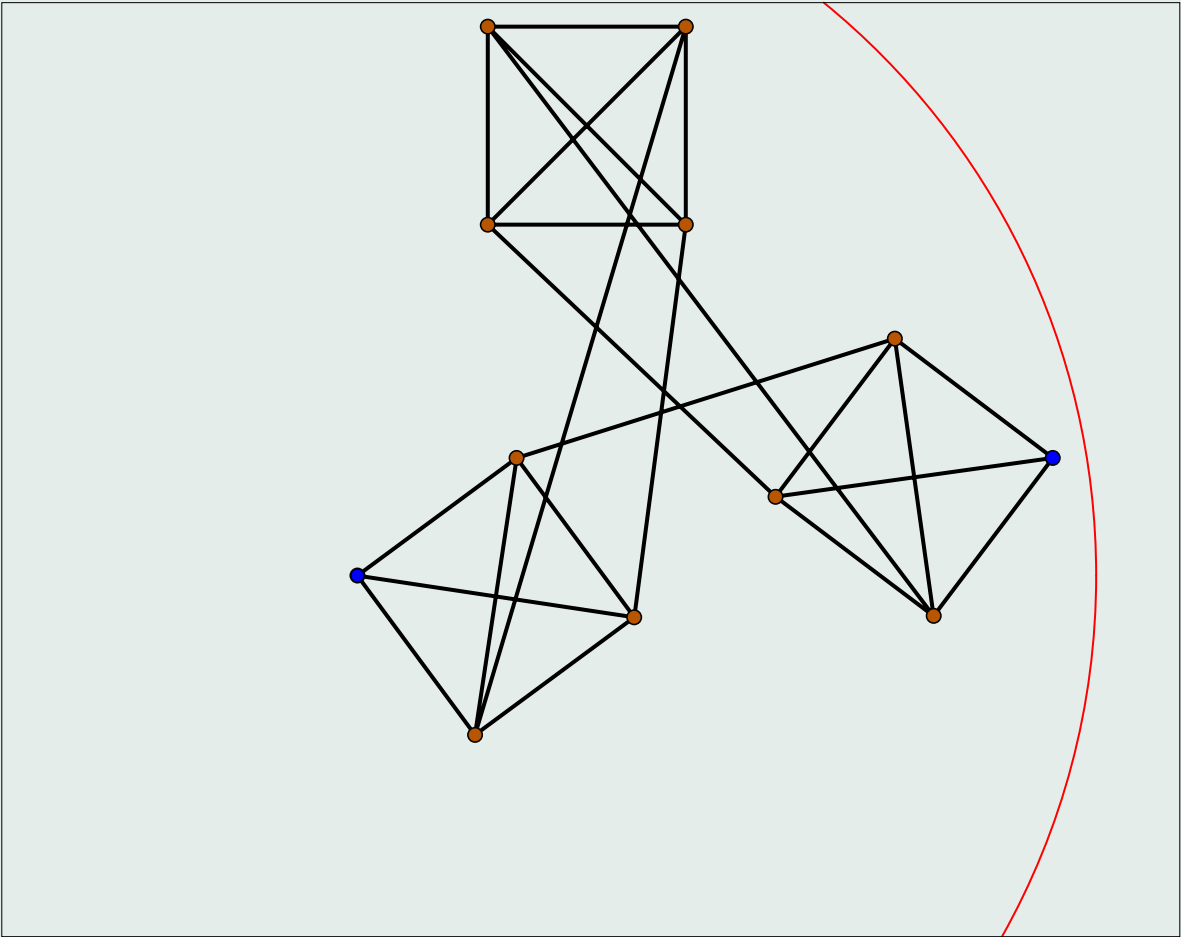
Page 72 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

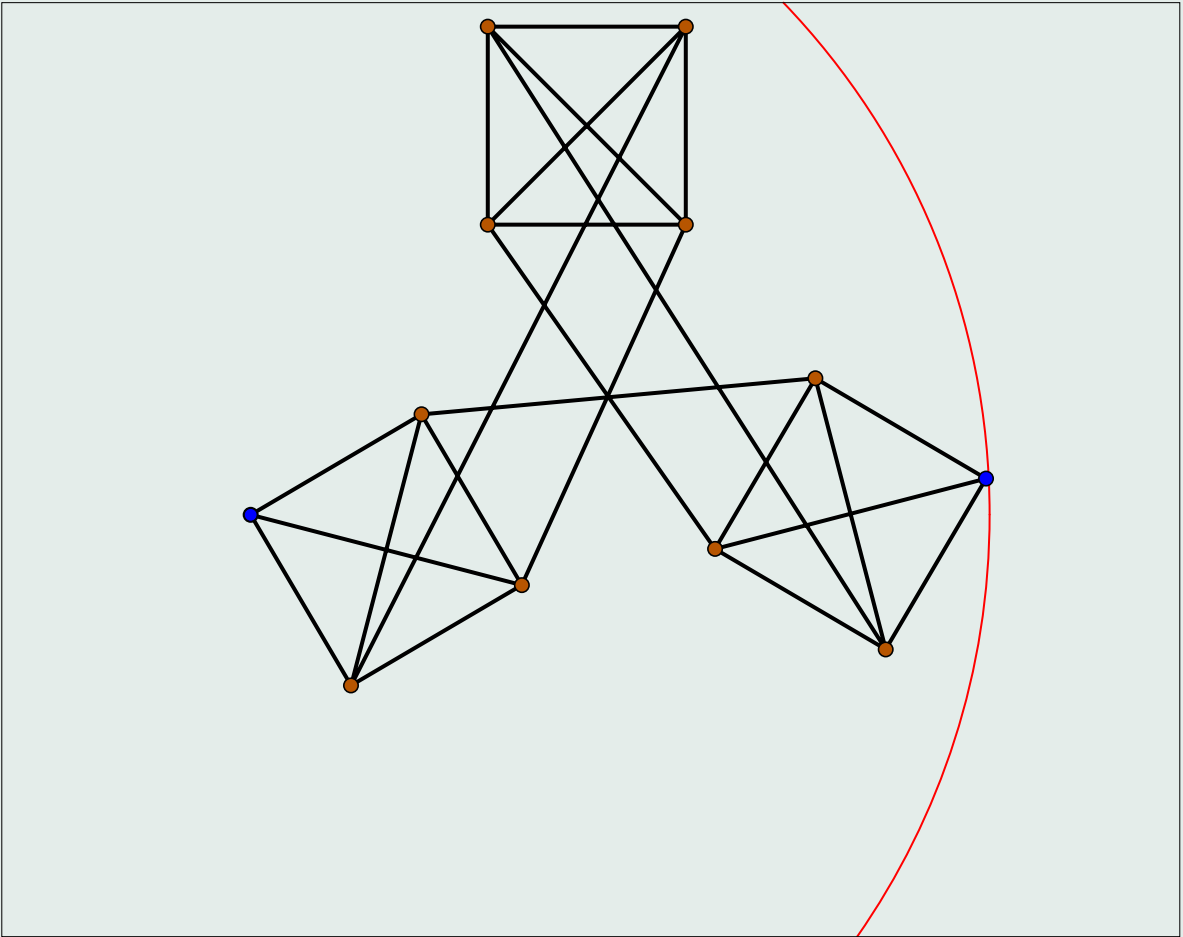
Page 73 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach . . .
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

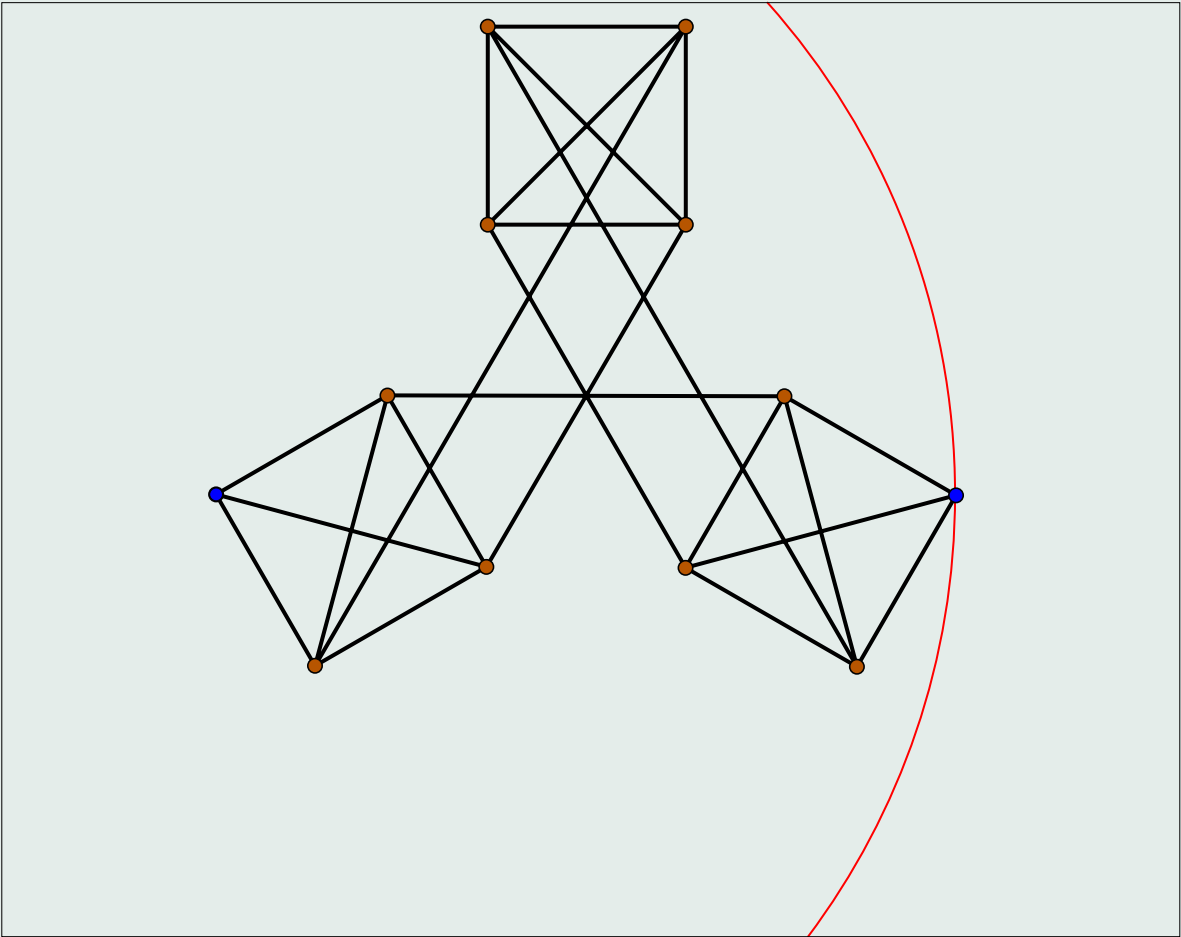
Page 74 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- Einleitung
- Arten der Starrheit
- Knotentransitive Graphen
- Beispiel
- Beispiel
- Mehrfach...
- Zufallsgraphen
- Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

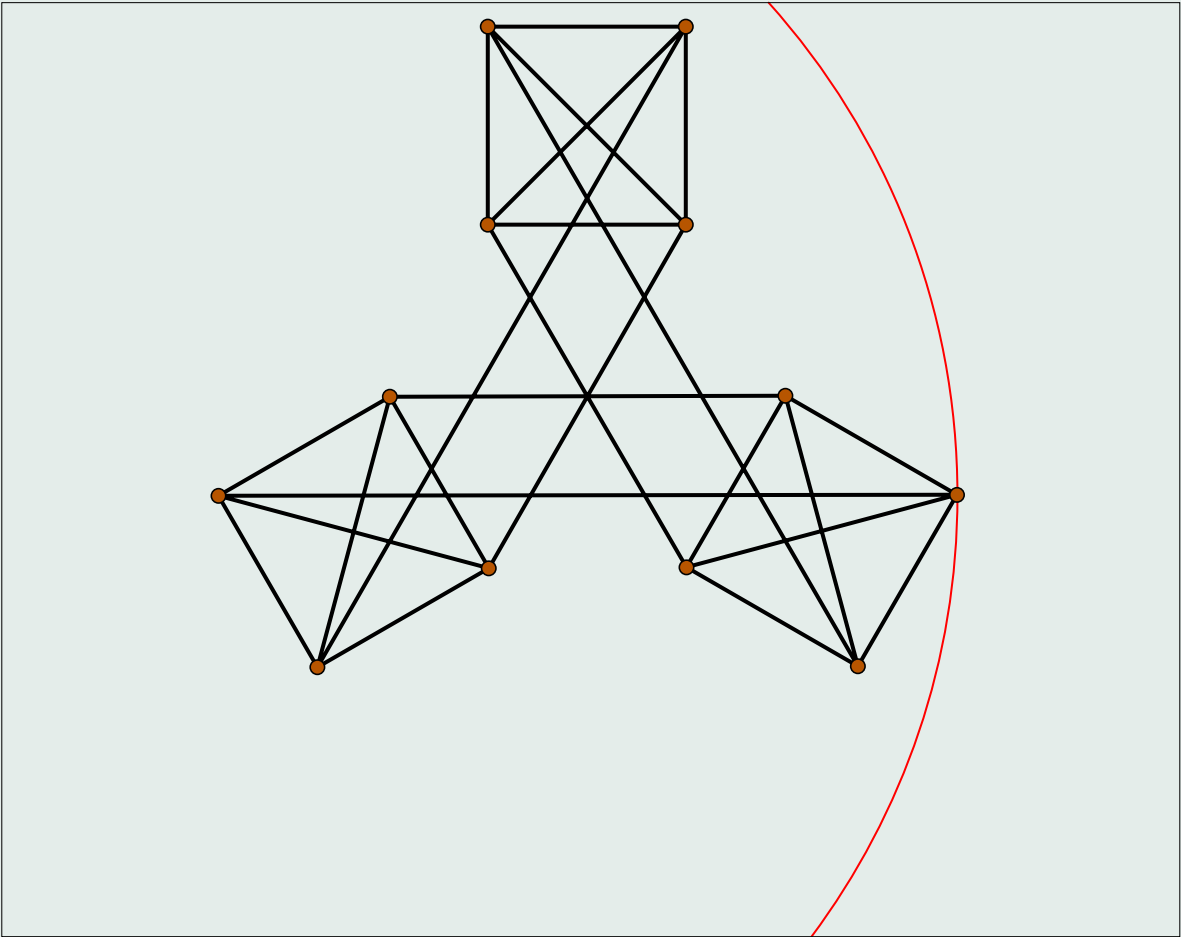
Page 75 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit



[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach...](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 76 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

6. Mehrfach zusammenhängende Graphen

Lovász und Yemini [9] zeigten dass jeder 6-zusammenhängende Graph in der Ebene generisch starr ist. Plättbare Graphen sind höchstens 5-zusammenhängend und es ist naheliegend zu fragen ob für plättbare Graphen ein niederer Zusammenhang hinreichend ist. Die folgende Abbildung 5 aber zeigt einen 5-fach zusammenhängenden wackeligen Graphen. Seine Starrheitseigenschaften können mit Hilfe des Satzes 2 leicht nachgewiesen werden.



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 77 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

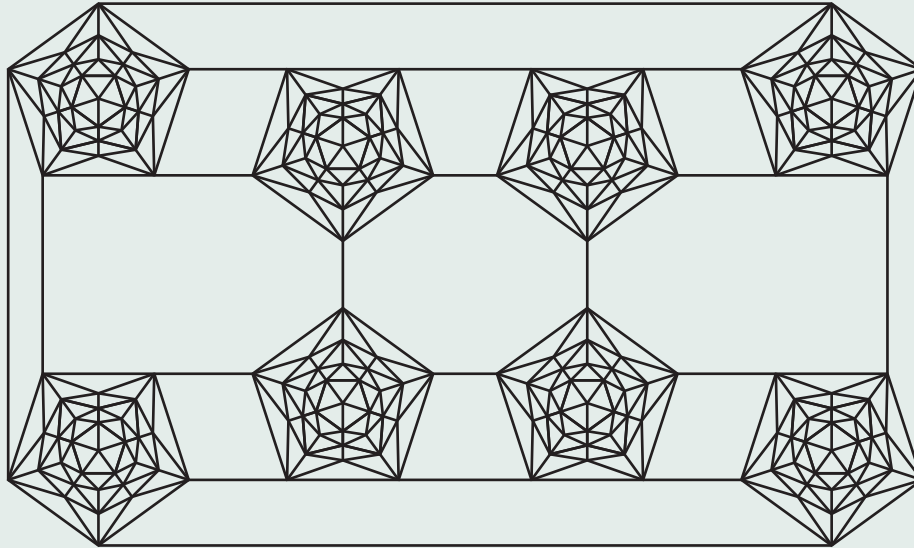


Abb. 5 *Ein ebener 5-zusammenhängender wackeliger Graph.*



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 78 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Lovász und Yemini [9] bemerken, dass ihr Beweisverfahren zeigt dass auch $G - \{e_1, e_2, e_3\}$ für alle $e_1, e_2, e_3 \in E$ starr ist. Daraus ergibt sich mit Satz 3 (siehe [5]):

Satz 8 *Jeder 6-fach zusammenhängende Graph ist in der Ebene global starr.*



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 79 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Wir bezeichnen G als *nahezu 6-zusammenhängend* wenn:

- (a) G 4-zusammenhängend ist,
- (b) für alle Paare von Untergraphen G_1, G_2 von G mit $G = G_1 \cup G_2$, $|V(G_1) - V(G_2)| \geq 3$ und $|V(G_2) - V(G_1)| \geq 3$, $|V(G_1) \cap V(G_2)| \geq 5$ gilt, und
- (c) für alle Paare von Untergraphen G_1, G_2 of G mit $G = G_1 \cup G_2$, $|V(G_1) - V(G_2)| \geq 4$ und $|V(G_2) - V(G_1)| \geq 4$, $|V(G_1) \cap V(G_2)| \geq 6$ gilt.

Satz 9 Jeder nahezu 6-zusammenhängende Graph ist im Überfluss starr.



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 80 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$K_{4,m}$, $m \geq 4$ erfüllt zum Beispiel die Voraussetzungen des Satzes 9, (nicht aber die des Satzes 8) und ist daher global starr.



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 81 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Eine sogar noch schwächere Zusammenhangseigenschaft ist für 4-reguläre Graphen zur globalen Starrheit hinreichend.

Ein Graph $G = (V, E)$ heisst *zyklisch k -Kanten-zusammenhängend* wenn für alle $X \subseteq V$ wobei $G[X]$ und $G[V - X]$ beide Zyklen enthalten, mindestens k verschiedene Kanten X mit $V - X$ verbinden.

Satz 10 *Ein zyklisch 5-Kanten-zusammenhängender 4-regulärer Graph ist global starr.*

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach...](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 82 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

BEWEIS: Nehmen wir an, G sei nicht global starr. G ist 3-fach zusammenhängend, eine Folge des zyklischen 5-Kantenzusammenhangs und der 4-Regularität. Daher ist, siehe [5], G nicht im Überfluss starr. Sei $G_1 = (V_1, E_1)$ eine maximale, im Überfluss starre Komponente von G . Aus $|E| = 2n$ folgt dass G einen M -Zyklus enthält, daher ist $|V_1| \geq 4$ und $|E_1| \geq 2|V_1| - 2$. Da G 4-regulär ist, muss $d_G(V_1) \leq 4$ und $|E(G - V_1)| \geq 2|V - V_1| - 2$ gelten. Daher muss sowohl in G_1 als auch in $G - G_1$ ein geschlossener Kantenzug auftreten. Nun steht $d_G(V_1) \leq 4$ im Widerspruch zur Annahme dass G zyklisch 5-zusammenhängend ist. $\square$

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach ...](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 83 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

7. Zufallsgraphen

Mit $G_{n,d}$ bezeichnen wir den Wahrscheinlichkeitsraum aller d -regulären Graphen der Ordnung n gleicher Wahrscheinlichkeitsverteilung. Eine Folge A_n von Grapheigenschaften gilt asymptotisch fast sicher (a.f.s.) in $G_{n,d}$ wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr_{G_{n,d}}(A_n) = 1$. Graphen in $G_{n,d}$ sind z. B. a.f.s. mehrfach zusammenhängend. Bollobás [1] und Wormald [12] zeigten, dass für $G \in G_{n,d}$ für jedes feste $d \geq 3$ der Graph G a.f.s. d -zusammenhängend ist. Eine Verallgemeinerung auf $3 \leq d \leq n - 4$ folgte durch Cooper et al. [3] und Krivelevich et al. [6]. Schliesst man triviale Schnitte aus, so erhält man schärfere Resultate. In [13] zeigt Wormald dass $G \in G_{n,d}$ mit festem $d \geq 3$ a.f.s. zyklisch $(3d - 6)$ -kantenzusammenhängend ist. Dies ergibt mit Satz 10 sofort:



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 84 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Satz 11 *Ein Graph G in $G_{n,4}$ ist a.f.s. global starr.*

Dieses Resultat gilt auch für $d \geq 4$.

Satz 12 *Ist $G \in G_{n,d}$ und $d \geq 4$ dann ist G a.f.s. global starr.*



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 85 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

BEWEIS: Ist $d \geq 6$, dann ist G is a.f.s. 6–
zusammenhängend [3, 6] und mit Satz 8 folgt die globale
Starrheit. Für $d = 5$ erhalten wir unser Resultat von Satz 11
durch Nachbarschaft, siehe [13]. $\square$

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach...](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 88 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Mit $G(n, p)$ bezeichnen wir den Wahrscheinlichkeitsraum aller Graphen der Ordnung n wobei jede Kante unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit p auftritt. Wir greifen auf folgende bekannte Eigenschaften von $G(n, p)$ zurück.

Lemma 2 *Sei $G \in G(n, p)$ mit $p = (\log n + k \log \log n + w(n))/n$, $k \geq 2$ ganz und $\lim_{n \rightarrow \infty} w(n) = \infty$. Für jedes feste ganze t sei S_t die Menge der Knoten von G mit Valez t oder kleiner. Dann gilt a.f.s.*

- (a) S_{k-1} ist leer,
- (b) Zwei Ecken von S_t sind nie Endknoten einer Kante oder eines Kantenzuges der Länge 2 in G .
- (c) $G - S_{t-1}$ ist nicht leer and t -zusammenhängend.

BEWEIS: (a) und (b) [2]. (c) folgt aus (a), (b) und [10, Theorem 4] $\square$



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 87 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Satz 13 Sei $G \in G(n, p)$ mit $p = (\log n + k \log \log n + w(n))/n$, and $\lim_{n \rightarrow \infty} w(n) = \infty$.

(a) Ist $k = 2$ dann ist G a.f.s. starr.

(b) Ist $k = 3$ dann ist G a.f.s. global starr.

BEWEIS: (a) Aus Lemma 2 folgt, dass a.f.s. $S_1 = \emptyset$ und dass $G - S_5$ a.f.s. 6- zusammenhängend ist. Daher ist $G - S_5$ a.f.s. global starr nach Satz 8. Fehlende Ecken sind nun durch mindestens zwei Kanten mit einem starren Graphen verbunden und es folgt dass G a.f.s. starr ist.

(b) Ähnlich wie (a) mit $S_2 = \emptyset$ und der Tatsache dass ein global starrer Graph durch Hinzufügen eines neuen Knotens und drei (oder mehr) Kanten erweitert werden kann. $\square$

[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach . . .](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Page 88 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Die Schranken für p in Satz 13 sind optimal, denn ist $G \in G(n, p)$ mit $p = (\log n + k \log \log n + c)/n$ und konstantem c , so ist G nicht notwendig a.f.s. von Minimalgrad k , see [2].



Das Kagome Gitter

Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page



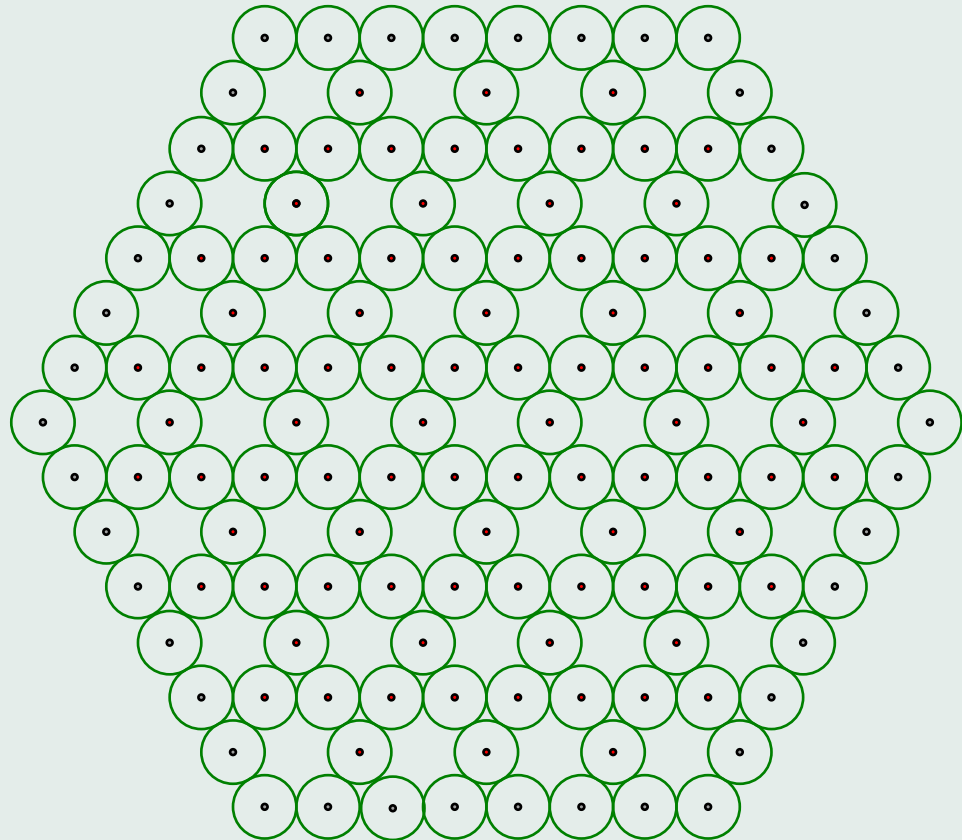
Page 89 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit



[Einleitung](#)[Arten der Starrheit](#)[Knotentransitive Graphen](#)[Beispiel](#)[Beispiel](#)[Mehrfach ...](#)[Zufallsgraphen](#)[Fragen](#)[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 90 of 93](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

Sei $Geom(n, r)$ der Wahrscheinlichkeitsraum aller Graphen der Ordnung n , wobei die n Ecken mit gleicher Wahrscheinlichkeit im Einheitsquadrat verteilt sind. Zwei Ecken sind durch eine Kante verbunden, wenn sie höchstens r voneinander entfernt sind.

Sei $G \in Geom(n, r)$. Li, Wan and Wang [8] zeigten, dass, falls $n\pi r^2 = \log n + (2k - 3)\log \log n + w(n)$ mit festem, ganzen $k \geq 2$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} w(n) = \infty$, dann ist G a.f.s. k -zusammenhängend. Wie von Eren et al. [4] bemerkt wurde, folgt daraus, zusammen mit Satz 8 dass G mit $n\pi r^2 = \log n + 9\log \log n + w(n)$ a.f.s. global starr ist. Andererseits kann man auch zeigen, siehe [8], dass falls $n\pi r^2 = \log n + (k - 1)\log \log n + c$ mit konstantem c , dann ist G nicht a.f.s. k -zusammenhängend. Es ist allerdings durchaus möglich, dass mit $n\pi r^2 = \log n + \log \log n + w(n)$ G a.f.s. starr, und mit $n\pi r^2 = \log n + 2\log \log n + w(n)$ a.f.s. global starr ist.



Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach...

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 91 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit

8. Fragen

- Von einem gegebenen 4-regulären Zufallsgraphen werden zufällig 4 Kanten entfernt. Wie kann man den Erwartungswert für die Anzahl der (global) starren Komponenten berechnen? Ist dieser Erwartungswert gross?
- Sind 6-reguläre Zufallsgraphen im Raum starr?
- Verallgemeinerungen zu Ungleichungen für Kantenlängen?
- Haben spärliche Zufallsgraphen eine Darstellung als Einheitsgraphen?



References

- [1] B. BOLLOBÁS, Random graphs, in *Surveys in Combinatorics 1999* (N.V. Temperley, ed.), LMS Lecture Note Series 52, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1981, 80–102.
- [2] B. BOLLOBÁS, *Random graphs* Academic Press, New York, 1985.
- [3] C. COOPER, A. FRIEZE AND B. REED, Random regular graphs of non-constant degree, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 3 (1982), no. 1, 91–98.
- [4] T. EREN, D.K. GOLDENBERG, W. WHITELEY AND Y.R. YANG, Rigidity, computation, and randomization in network localization, preprint.
- [5] B. JACKSON AND T. JORDÁN, Connected rigidity matroids and unique realizations of graphs, *J. Combinatorial Th., Series B*, to appear.
- [6] M. KRIVELEVITCH, B. SUDAKOV, V.H. VU AND N.C. WORMALD, Random regular graphs of high degree, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 3 (1982), no. 1, 91–98.
- [7] G.LAMAN On Graphs and rigidity of plane skeletal structures, *J. Engrg. Math.* 4 (1970), 331–340.
- [8] X-Y. LI, P-J. WAN AND Y. WANG, Fault tolerance deployment and topology control in wireless networks, in *Proceedings of the ACM Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing (Mobihoc)* (2003), Annapolis, MD, June 2003.
- [9] L. LOVÁSZ AND Y. YEMINI, On generic rigidity in the plane, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 3 (1982), no. 1, 91–98.
- [10] T. LUCZAK, Size and connectivity of the k -core of a random graph, *Discrete Math.* 91 (1991), 61–68.
- [11] J.GRAVER, B. SERVATIUS AND H.SERVATIUS *Combinatorial rigidity*, American Mathematical Society (1993).

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 92 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- [12] N.C. WORMALD, The asymptotic connectivity of labelled regular graphs, *J. Combinatorial Th., Series B*, (1981), 156–167.
- [13] N.C. WORMALD, Models of random regular graphs, in *Surveys in Combinatorics 1999* (J.D. Lamb and D.A. Preece, eds.), (1999), 239–298.

Einleitung

Arten der Starrheit

Knotentransitive Graphen

Beispiel

Beispiel

Mehrfach . . .

Zufallsgraphen

Fragen

Home Page

Title Page



Page 93 of 93

Go Back

Full Screen

Close

Quit