Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Michael Scheutzow
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Maria Willmers, MA 7-5

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Vorlesung Versicherungsmathematik

9.Blatt
Übung: 11.12.08
Abgabe: 18.12.08

Aufgabe 1: Es seien X_1, $X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = E[X_1] < \infty$, Varianz $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) < \infty$ und $N(t)$ der zugehörige Erneuerungsprozess. Mit Hilfe des elementaren Erneuerungssatzes und des Zentralen Grenzwertsatzes beweise man, dass

$$\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t\sigma^2\mu^{-3}}}$$

für $t \to \infty$ in Verteilung gegen eine Standard-Normalverteilte Zufallsvariable konvergiert.

Aufgabe 2: Es sei $L_t = A_t + R_t = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ die Gesamtlebensdauer zur Zeit t eines Erneuerungsprozesses $N(t)$, wobei F die Verteilung der unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen X_i, $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$ ist. Ferner sei $\mu = E[X_1] < \infty$ und F nichtarithmetisch. Man zeige, dass für $t \to \infty$

$$P[L_t \leq x] \to \frac{1}{\mu} \int_0^x y \, dF(y).$$

Aufgabe 3: Im Beweis des Fundamentalen Erneuerungssatzes wurde benutzt, dass

$$\lim_{t\to\infty} \int_{]0,t]} H_u(t-x) \, dM(x) \leq \frac{\Delta}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

(vgl. Vorlesung und siehe auch das Skript von *J. Blath*, pp.123-125). Man gebe eine präzise Begründung dieser Ungleichung im Fall $\mu = E[X_1] < \infty$ und F nichtarithmetisch.

Aufgabe 4: Man untersuche, welche der folgenden Verteilungen *light*- bzw. *heavy-tailed* sind (gegebenenfalls in Abhängigkeit von den jeweiligen Parametern):

- Die einseitige Normalverteilung mit Dichte:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x), \qquad \mu \in \mathbb{R},\, \sigma^2 > 0;$$

- Die einseitige Cauchy-Verteilung mit Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{2a}{a^2(b-x)^2} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x), \qquad a > 0,\, b \in \mathbb{R};$$

- Die Weibull-Verteilung mit Dichte:

$$f(x) = \lambda\beta x^{\beta-1} e^{-\lambda x^\beta} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x), \qquad \lambda > 0,\, \beta > 0.$$

Jede Aufgabe 6 Punkte