Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Michael Scheutzow
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Maria Willmers, MA 7-5

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Vorlesung Versicherungsmathematik

8.Blatt
Übung: 04.12.08
Abgabe: 11.12.08

Aufgabe 1: Es seien $X_1, X_2, \ldots$ und $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige und identisch exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$. Wir definieren die Partialsummen $S_k = \sum_{j=1}^{k}(X_j + Y_j)$, $k \geq 1$ und den dazugehörigen Erneuerungsprozess $N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}, t \geq 0$. Man ermittle die Erneuerungsfunktion $M(t) = E[N(t)]$.

Aufgabe 2: Es seien $k, \lambda > 0$. Die Funktion $\gamma_{k,\lambda} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\gamma_{k,\lambda}(t) := \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} e^{-\lambda t} t^{k-1}.$$

Sie ist die Dichte der Gammaverteilung mit Formparameter k und Skalierungsparameter λ. Man zeige mit Hilfe eines *Erneuerungsarguments* (und *nicht* durch direktes Integrieren) folgende Aussage über die Tails der Poisson-Verteilung: Ist Z eine Poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter (λt), so gilt

$$P[Z \geq k] = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!} = \int_0^t \gamma_{k,\lambda}(x)dx$$

für beliebiges $\lambda > 0$.

Hinweis: Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Gammaverteilung zu parametrisieren, die obige ist für diese Aufgabe die zweckmäßigste.

Aufgabe 3: Man zeige, dass für jeden Erneuerungsprozess $N(t)$, $t \geq 0$, die Gleichung

$$\mathbb{E}[N(t)^2] = M(t) + 2 \cdot \int_0^t M(t-s)\, dM(s)$$

gilt.

Aufgabe 4: Gegeben seien ein Standard-Poisson-Prozess (mit Parameter $\lambda = 1$) $\overline{N}(t), t \geq 0$, eine reellwertige, positive und von $\overline{N}(t)$ unabhängige Zufallsvariable Θ sowie eine reelle, wachsende Funktion $\nu(t)$ mit $\nu(0) = 0$. Der Prozess

$$N(t) := \overline{N}(\Theta\, \nu(t)), t \geq 0,$$

heißt *gemischter Poisson-Prozess.* Man berechne mit Hilfe von Aufgabe 3 die Funktion $V(t) := \mathrm{Var}(N(t))$.

Jede Aufgabe 6 Punkte