Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Michael Scheutzow
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Maria Willmers, MA 7-5

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Vorlesung Versicherungsmathematik

7.Blatt
Übung: 27.11.08
Abgabe: 04.12.08

Aufgabe 1: Es seien X_1, $X_2, \dots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit $E[X_1] =: \mu$ und $\mathrm{Var}(X_1) =: \sigma^2 < \infty$, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, und N eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Unter der Annahme der Unabhängigkeit von N, X_1, $X_2, \dots$ gilt die folgende Variante der 2.Waldschen Gleichung:

$$\mathrm{Var}(S_N) = \sigma^2 E[N] + \mathrm{Var}(N)\mu^2$$

(vgl. Vorlesung, Satz 5.11.). Man zeige, dass dies unter der schwächeren Annahme der Unabhängigkeit nur für $\{N = n\}$, X_{n+1}, $X_{n+2}, \dots$ (für jedes $n \in \mathbb{N}_0$) im Allgemeinen NICHT gilt.

Aufgabe 2: Es seien X_1, $X_2, \dots$ unabhängige und identisch Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p \in (0,1)$. Man zeige, dass für $p \leq x \leq 1$

$$P\Big[\sum_{i=1}^n X_i \geq xn\Big] \leq e^{-nI(x)}$$

mit

$$I(x) = x \log \frac{x}{p} + (1-x) \log \frac{1-x}{1-p}$$

gilt.

Aufgabe 3: Wir betrachten das Standardmodell der kollektiven Risikotheorie wobei die Verteilung der Anzahl N der Schäden aus der Panjerklasse sei. Man zeige die folgenden beiden Gleichungen für die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen:

$$\begin{aligned}\big(1 - a\phi_{X_1}(t)\big)\phi'_{S_N}(t) &= (a+b)\phi_{S_N}(t)\phi'_{X_1}(t);\\ \big(1 - a\phi_{X_1}(t)\big)\phi^{(n)}_{S_N}(t) &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}\Big(a + b\frac{k}{n}\Big)\phi^{n-k}_{S_N}(t)\phi^{k}_{X_1}(t).\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Analog zur Rekursion von Panjer beweise man die folgende Rekursion von DePril für die binomialen Momente. Sei N aus der Panjerklasse und X_1 eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable mit endlichem m-ten Moment. Für $1 \leq n \leq m$, $n \in \mathbb{N}$, gilt dann

$$E\Big[\binom{S_N}{n}\Big] = \frac{1}{1-a}\sum_{k=1}^n \Big(a + b\frac{k}{n}\Big) E\Big[\binom{S_N}{n-k}\Big] E\Big[\binom{X_1}{k}\Big].$$

Jede Aufgabe 6 Punkte