Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Michael Scheutzow
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Maria Willmers, MA 7-5

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Vorlesung Versicherungsmathematik

5.Blatt
Übung: 13.11.08
Abgabe: 20.11.08

Aufgabe 1: Es sei (X_t) ein Martingal auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$. Man zeige dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $\sup_t E[X_t^2] < \infty$;

b) Für jede wachsende Folge (t_n) mit $t_n \geq 0$ und $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ ist (X_{t_n}) eine Cauchyfolge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$;

c) Für jede wachsende Folge (t_n) mit $t_n \geq 0$ und $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ konvergiert X_{t_n} gegen X_∞ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$;

d) Es existiert ein X in $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $X_t = E[X \mid \mathcal{F}_t]$.

Aufgabe 2: Man beweise mit Hilfe des Satzes von Fubini für

$$M_t := \mathbb{1}_{[Y,\infty[}(t) - \int_{]0,t]} \mathbb{1}_{]0,Y]}(u)\, d\Lambda_Y(u), \qquad t \geq 0,$$

das folgende Resultat, das zum Beweis von Lemma 4.3. in der Vorlesung benötigt wurde:

$$E[(M_t - M_s)^2] = \int_{]s,t]} \big(1 - \Lambda_Y(\{u\})\big)\, dF_Y(u),$$

wobei F_Y die Verteilungsfunktion und Λ_Y die kumulierte Sterblichkeitsintensität der Zufallsvariable Y (dem Minimum von Sterbezeitpunkt und Vertragsende) ist.

Aufgabe 3:

a) Es seien Y_i, $i = 1, \ldots, n$, unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariable zum Parameter $\lambda > 0$. Man berechne die Verteilung von $S_n := \sum_{i=1}^n Y_n$; Um welche Verteilung handelt es sich hierbei?

b) Es sei X eine nicht-negative, reellwertige Zufallsvariable. Man zeige

$$E[X] = \int_0^\infty P[X > t]\, dt.$$

Jede Aufgabe 8 Punkte