

Übungen zur Vorlesung Versicherungsmathematik

3. Blatt

Übung: 30.10.08
Abgabe: 06.11.08

Aufgabe 1: Ein Ehepaar schließt die folgende Versicherung ab: Bis zum Tod des ersten Ehepartners zahlt das Paar gemeinsam monatlich den Fixbetrag π an das Versicherungsunternehmen, ab dem Tod erhält der überlebende Ehepartner eine monatliche feste Rente a ausgezahlt, und zwar bis zu seinem eigenen Tod. Man modelliere den Versicherungsvertrag und leite eine Formel für den erwarteten Barwert her.

Aufgabe 2: Wir betrachten die Lebensdauerverteilung

$$F(x) := \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{\mu(x-1)} & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 1 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

in Abhängigkeit von einem Parameter $\mu > 0$. Man berechne die kumulierte Sterblichkeitsintensität

$$\Lambda(t) = \int_{[0,t]} \frac{dF(s)}{1 - F(s-)}, \quad t \in [0, 3].$$

Aufgabe 3: Es sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, der σ -Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ gegeben durch die Potenzmenge und der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\{\omega_1\}) = 1/3$, $P(\{\omega_2\}) = 1/6$, $P(\{\omega_3\}) = P(\{\omega_4\}) = 1/4$. X sei eine Zufallsvariable mit $X(\omega_1) = 1$, $X(\omega_2) = 3$, $X(\omega_3) = -2$ und $X(\omega_4) = 0$. Weiterhin betrachten wir die σ -Algebren $\mathcal{G} = \sigma(\{\omega_1, \omega_2\})$ und $\mathcal{H} = \sigma(\{\omega_1\})$. Man berechne $E[X]$, $E[X|\mathcal{G}]$ und $E[X|\mathcal{H}]$.

Aufgabe 4: Es sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Die σ -Algebren \mathcal{G} und \mathcal{H} seien Teil- σ -Algebren von \mathcal{F} (also $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$).

(i) Man zeige, dass für $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$

$$E[X|\mathcal{G}] = E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}]$$

gilt.

(ii) Man zeige an Hand eines Gegenbeispiels, dass im Allgemeinen

$$E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] \neq E[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}].$$