Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik
Vorlesung: Prof. Dr. Michael Scheutzow
Übung: Stephan Sturm
Sekretariat: Maria Willmers, MA 7-5

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Vorlesung Versicherungsmathematik

14. und letztes Blatt
Übung: 29.01.09
Abgabe: 05.02.09

Aufgabe 1: Sei $u : S \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Nutzenfunktion auf einem nichtleeren Intervall $S \subseteq \mathbb{R}$.

a) Die *absolute Risikoaversion* eines Investors ist durch den *Arrow-Pratt Koeffizienten*

$$\alpha(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

gegeben. Man bestimme alle Nutzenfunktionen $u : S \to \mathbb{R}$, die eine konstante absolute Risikoaversion $\alpha > 0$ haben (solche Nutzenfunktionen werden auch als *CARA (constant absolute risk aversion)* bezeichnet).

b) Sei nun $S =]0, \infty[$. Die *relative Risikoaversion* wird definiert durch

$$\alpha_R(x) = x\alpha(x).$$

Man bestimme wiederum alle Nutzenfunktionen $u : S \to \mathbb{R}$, die eine konstante relative Risikoaversion $\gamma \in [0, 1]$ haben (solche Nutzenfunktionen werden als *CRRA (constant relative risk aversion)* bzw. auch als *HARA (hyperbolic absolute risk aversion)* bezeichnet).

Aufgabe 2: Es seien u_1, $u_2 : S \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf einem nichtleeren Intervall $S \subseteq \mathbb{R}$ mit den *Arrow-Pratt Koeffizienten* $\alpha_1(x)$ und $\alpha_2(x)$. Man zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Es gilt $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x)$ für alle $x \in S$;

ii) Es existiert eine strikt wachsende, konkave Funktion g, so dass $u_2 = g \circ u_1$.

Aufgabe 3: Man zeige, dass der V@R (Value at risk) einer Finanzposition X gegeben durch

$$V@R_\lambda(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : P[m + X < 0] \leq \lambda\}$$

für jedes Niveau $\lambda \in (0, 1)$ ein positiv homogenes, aber kein konvexes Risikomaß ist.

Aufgabe 4: Wir definieren das *entropische Risikomaß* ρ_{ent} und das *worst-case-Risikomaß* ρ_{max} durch

$$\begin{aligned} \rho_{ent}(X) &:= \frac{1}{\beta} \log E[e^{-\beta X}], \qquad \text{für ein fest gewähltes } \beta > 0, \\ \rho_{max}(X) &:= \inf\{m \in \mathbb{R} : X + m \geq 0 \; P\text{-fast sicher}\}. \end{aligned}$$

Man zeige, dass ρ_{ent} und ρ_{max} Risikomaße sind und untersuche, ob sie kohärent bzw. positiv homogen oder konvex sind.

Jede Aufgabe 6 Punkte